Единый формализм для описания динамических, квантовых и стохастических систем

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site: $http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Рассматривается динамика частиц в пространстве-времени, где движение свободных частиц является изначально стохастическим. Традиционный динамический формализм, разработанный для пространства-времени, где движение свободных частиц является изначально детерминированным, представляется неадекватным. Статистический ансамбль стохастических (или детерминированных) частиц рассматривается как главный объект динамики. При таком подходе оказывается возможным описывать детерминированные, стохастические и квантовые частицы с помощью единого формализма. Квантовые частицы описываются как стохастические частицы, т.е. без ссылки на квантовые принципы. Кроме того с помощью этого формализма можно описывать классическую невязкую жидкость. Имеются четыре различные версии формализма: (1) описание в динамических переменных Эйлера, (2) описание в динамических переменных Лагранжа, (3) описание в терминах обобщенной функции тока, (4) описание в терминах волновой функции. Единый формализм является чисто динамическим. Даже описывая стохастические системы, он не ссылается на вероятность и вероятностные структуры. В релятивистском случае единый формализм может описывать рождение и уничтожение пар частица - античастица.

1 Введение

Классическая механика и анализ бесконечно малых были созданы Исааком Ньютоном в XVII веке почти одновременно. Обыкновенные дифференциальные уравнения были главным инструментом классической механики. В XVIII и XIX веках развитие классической механики осуществлялось с помощью модификации динамических уравнений, когда они применялись к новым динамическим системам. Все это время концепция пространства событий (пространства-времени) оставалась неизменной. В ньютоновской концепции пространства событий имеется два независимых инварианта: пространство и время.

В начале XX века Альберт Эйнштейн обнаружил, что динамику можно развивать не только с помощью модификации динамических уравнений. Динамику можно развивать также, модифицируя пространство событий. А. Эйнштейн предложил и осуществил первые две модификации пространства событий. В первой модификации, известной как специальная теория относительности, два ньютонова инварианта (пространство и время) были заменены одним – пространственно-временным интервалом. После такой замены стало возможным говорить о пространстве-времени и о пространственно-временной геометрии. Вторая модификация пространства событий была произведена А. Эйнштейном десятью годами позднее. Эта модификация известна как общая теория относительности. В соответствии с общей теорией относительности пространственно-временная геометрия может быть неоднородной, и эта неоднородность зависит от распределения материи в пространстве-времени.

В тридцатых годах XX века было обнаружено, что свободные частицы малой массы движутся стохастически. *Движение свободных частиц зависит только от свойств пространства-времени.* Это означало, что для объяснения наблюдаемой стохастичности нужна очередная модификация свойств пространства событий. Необходимая третья модификация выглядела достаточно экзотично. Поскольку стохастичность различна для частиц разной массы, свободное движение частицы должно зависеть от массы частицы, т.е. масса частицы должна быть геометризована. В рамках римановой геометрии это было невозможно. Кроме того в рамках классической механики движение частицы детерминировано. Если мы хотим объяснить стохастичность движения частицы свойствами пространства-времени, мы должны использовать такую пространственно-временную геометрию, где движение свободной частицы является изначально стохастическим. В рамках римановой геометрии это было невозможно. Мы не знали геометрии с такими свойствами.

В начале XX века мы стояли перед альтернативой: или пространственно-временная геометрия с необычными экзотическими свойствами, или отказ от классической механики. У нас не было подходящей пространственно-временной геометрии. Альтернатива была разрешена в пользу квантовой механики, которая заменила классическую механику частиц малой массы. При такой замене принципы классической механики были заменены квантовыми принципами. Такая замена классических принципов квантовыми принципами была сложной процедурой, которую удалось осуществить только для нерелятивистских явлений.

С логической точки зрения модификация пространственно-временной геометрии более привлекательна, чем квантовая механика, потому что она изменяет *только свойства пространства-времени*, но не затрагивает классических принципов динамики, тогда как квантовая механика пересматривает эти принципы. К сожалению, третья модификация геометрии пространства-времени была невозможна в первой половине XX века.

Новая концепция геометрии, которая сделала возможной третью модификацию пространства-времени, [1], появилась только в конце XX века. Новая концепция геометрии (известная как Т-геометрия [2, 3, 4]) очень проста. Она предполагает, что любая пространственно-временная геометрия полностью описывается мировой функцией [5]. Тогда любая пространственно-временная геометрия может быть получена из собственно евклидовой геометрии с помощью деформации (замены евклидовой мировой функции σ_{E} мировой функцией σ нужной геометрии во всех определениях и соотношениях собственно евклидовой геометрии). Т-геометрия обладает необычными свойствами. Она, вообще говоря, многовариантна, неаксиоматизируема и может быть представлена в бескоординатном виде. Дискретная и непрерывная Т-геометрии описываются единообразно.

В новой (многовариантной) пространственно-временной геометрии масса частицы геометризована, движение свободных частиц является изначально стохастическим и параллельность векторов абсолютна и, вообще говоря, интранзитивна. Кроме того параметры пространства-времени зависят от квантовой постоянной, и статистическое описание движения стохастических частиц эквивалентно квантовому описанию. Использование многовариантной геометрии пространства-времени позволяет устранить квантовые принципы и вернуться к классической механике стохастических частиц.

Вообще говоря, исчисление бесконечно малых, созданное для ньютоновского пространства событий с детерминированным движением частиц, не согласуется с концепцией пространства-времени, где движение свободной частицы является изначально стохастическим. Нужен новый математический инструмент, находящийся в согласии с многовариантной пространственно-временной геометрией. Создание такого инструмента – очень трудная задача, и мы не будем пытаться ее решить. Вместо этого мы *возьмем от новой пространственно-временной геометрии только свойство стохастического движения свободных частиц и попытаемся описать его в традиционном римановом пространстве-времени.* В римановом пространстве-времени естественное движение свободных частиц детерминировано. Мы попытаемся сформулировать традиционную классическую механику в таком виде, где стохастическое движение частиц было бы естественным, тогда как детерминированное движение частиц было бы частным случаем стохастического движения, когда стохастичность исчезает.

Заметим, что традиционная классическая механика рассматривает только детерминированные частицы, движение которых описывается динамическими уравнениями (обыкновенными дифференциальными уравнениями). Обычно рассматривают только некоторые частные случаи стохастического движения, ссылаясь при этом на теорию вероятностей. Главным объектом традиционной классической механики является отдельная детерминированная частица $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. С точки зрения традиционной классической механики детерминированная частица (динамическая система) и стохастическая частица (стохастическая система) являются принципиально разными объектами. Принципиальное различие состоит в том, что для динамической системы существуют динамические уравнения, а для стохастической системы динамических уравнений нет. Не существует собирательного понятия по отношению к понятию динамической системы и понятию стохастической системы.

Если информация о детерминированной частице $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ неполна (например, начальные условия известны приближенно), то возможны разные варианты движения частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Движение частицы многовариантно. В этом случае рассматриваются все возможные версии. Используется статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$, который представляет собой множество многих независимых частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Разные элементы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$ движутся различно и движение всех этих элементов описывает все возможные движения частицы $\mathcal{S}_\mathrm{d}$. Частица $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ является динамической системой, статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$ также является динамической системой. Это означает, что существуют динамические уравнения для частицы $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ и для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$. Эти динамические уравнения описывают эволюцию состояния соответственно частицы $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ и статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$.

Динамические уравнения для $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ и для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$ связаны между собой. Например, если динамической системой $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ является свободная нерелятивистская частица, действие $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_\mathrm{d}}$ для $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ имеет вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_\mathrm{d}}[\mathbf{x}] = \int \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 dt, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \{x^1(t), x^2(t), x^3(t)\}$, и m есть масса частицы.

Действие для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$ свободных независимых частиц $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ представляет собой сумму действий (1.1). Оно имеет вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]}[\mathbf{x}] = \int \int_{V_\xi} \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 \rho_0(\boldsymbol{\xi})\, dt d\boldsymbol{\xi}, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) = \{x^1(t, \boldsymbol{\xi}), x^2(t, \boldsymbol{\xi}), x^3(t, \boldsymbol{\xi})\}$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ суть переменные (лагранжевы координаты), которые маркируют элементы (частицы) статистического ансамбля. V_ξ есть область изменения переменных $\boldsymbol{\xi}$. Величина $\rho_0(\boldsymbol{\xi})$ представляет собой весовую функцию. Величина

$$N = \int_{V_\xi} \rho_0(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} \tag{1.3}$$

может быть интерпретирована как число динамических систем $\mathcal{S}_\mathrm{d}$, образующих статистический ансамбль.

Динамические уравнения, порожденные действиями (1.1) и (1.2) одинаковы

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = 0, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \tag{1.4}$$

$$\rho_0(\boldsymbol{\xi})\, m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = 0, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) \tag{1.5}$$

Динамические системы $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ и $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$ эквивалентны в том смысле, что можно получить динамические уравнения для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$ из динамических уравнений для $\mathcal{S}_\mathrm{d}$. Наоборот, можно получить динамические уравнения для $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ из динамических уравнений для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$.

Какая из динамических систем $\mathcal{S}_\mathrm{d}$, $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$ первична, а какая является производной? Обычно считается, что динамическая система $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ является первичным (фундаментальным) объектом, тогда как статистический ансамбль рассматривается обычно как вторичный (производный) объект, потому что он является более сложным объектом, состоящим из $\mathcal{S}_\mathrm{d}$.

Предлагается рассматривать статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$ как первичный объект, тогда как отдельная динамическая система $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ рассматривается как вторичный (производный) объект. Такой подход позволяет построить динамику стохастических систем.

В самом деле, статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\text{st}}\right]$ независимых стохастических систем $\mathcal{S}_{\text{st}}$ является динамической системой, хотя его элементы $\mathcal{S}_{\text{st}}$ являются стохастическими системами. Это означает, что для $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\text{st}}\right]$ существуют динамические уравнения, хотя для $\mathcal{S}_{\text{st}}$ динамических уравнений нет. Объяснение этого удивительного факта следующее. Когда мы строим статистический ансамбль из многих стохастических систем, регулярные черты накапливаются, в то время как случайные черты компенсируются. В результате, если число стохастических систем стремится к бесконечности, мы получаем систему имеющую только регулярные характеристики. Другими словами, мы получаем динамическую систему.

Математически это выглядит следующим образом. Мы добавляем некоторые члены к действию (1.2). Эти члены выбраны таким образом, чтобы описать квантовую стохастичность, порожденную свойствами пространственно-временной геометрии. Предлагаемый метод учета этой стохастичности приводит к описанию квантовой стохастичности, которая хорошо исследована. Действие записывается в виде

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\text{st}}\right]}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right]=\int\int_{V_{\xi}}\left\{\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^{2}+\frac{m}{2}\mathbf{u}^{2}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}\rho_{0}\left(\boldsymbol{\xi}\right)dtd\boldsymbol{\xi},\qquad\dot{\mathbf{x}}\equiv\frac{d\mathbf{x}}{dt}\tag{1.6}$$

Переменная $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$ описывает регулярную составляющую движения частицы. Переменная $\mathbf{u}=\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ описывает среднее значение стохастической составляющей скорости, $\hbar$ представляет собой квантовую постоянную. Второй член в (1.6) описывает кинетическую энергию стохастической составляющей скорости. Третий член описывает взаимодействие между стохастической составляющей $\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ и регулярной составляющей $\dot{\mathbf{x}}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$. Оператор

$$\boldsymbol{\nabla}=\left\{\frac{\partial}{\partial x^{1}},\frac{\partial}{\partial x^{2}},\frac{\partial}{\partial x^{3}}\right\}\tag{1.7}$$

определен в пространстве координат $\mathbf{x}$. Динамические уравнения для динамической системы $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\text{st}}\right]$ получаются в результате вариации действия (1.6) по динамическим переменным $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$.

Чтобы получить функционал действия для $\mathcal{S}_{\text{st}}$ из действия (1.6) для $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\text{st}}\right]$, следует опустить интегрирование по $\boldsymbol{\xi}$ в (1.6), как это следует из сравнения (1.2) и (1.1). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\text{st}}}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right]=\int\left\{\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^{2}+\frac{m}{2}\mathbf{u}^{2}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}dt,\qquad\dot{\mathbf{x}}\equiv\frac{d\mathbf{x}}{dt}\tag{1.8}$$

где $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t\right)$ и $\mathbf{u}=\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ суть зависимые динамические переменные. Функционал действия (1.8) не является хорошо определенным (для $\hbar\neq0$), потому что оператор $\boldsymbol{\nabla}$ определен в некоторой трехмерной окрестности точки $\mathbf{x}$, а не в самой точке $\mathbf{x}$. Поскольку функционал действия (1.8) не является хорошо определенным, то нельзя получить динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\text{st}}$. Это по определению означает, что частица $\mathcal{S}_{\text{st}}$ является стохастической. Полагая $\hbar=0$ в (1.8), мы преобразуем действие (1.8) в действие (1.1), потому что в этом случае $\mathbf{u}=0$ в силу динамических уравнений.

Зависимость средней стохастической скорости $\mathbf{u}$ от зависимой переменной $\mathbf{x}$, описывающей регулярную составляющую движения, и появление $\nabla\mathbf{u}$ в функционале действия для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ является формальным признаком стохастичности частицы.

Квантовая постоянная $\hbar$ была введена в действие (1.6), чтобы описание при помощи действия (1.6) было эквивалентно квантовому описанию с помощью уравнения Шредингера [6]. Если заменить член $-\hbar\nabla\mathbf{u}/2$ некоторой функцией $f(\nabla\mathbf{u})$, то получится статистическое описание другой стохастической системы с другим видом стохастичности, которая не совпадает с квантовой стохастичностью. Другими словами, вид последнего члена в (1.6) описывает характер стохастичности.

Хотя мы не можем исследовать стохастическую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, мы можем описать и исследовать статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, потому что $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ является хорошо определенной динамической системой (1.6). Исследование статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ позволяет исследовать некоторые средние характеристики стохастической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Информация о $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, полученная при исследовании $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, не является полной информацией. Можно получить среднюю скорость стохастической частицы, средние траектории, среднюю энергию и некоторые другие средние характеристики. Однако, нельзя получить распределение по скоростям и другие детальные характеристики стохастической частицы. Чтобы получить такие детальные характеристики, нужна дополнительная информация о свойствах стохастической частицы (исследование статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ недостаточно для этой цели). Тем не менее, информация, полученная из исследования статистического ансамбля, оказывается полезной во многих случаях. Например, можно показать [6], что при надлежащей замене переменных действие (1.6) приводится к действию для шредингеровской частицы, т.е. к действию для динамической системы, описываемой с помощью уравнения Шредингера.

Таким образом, имеется общий подход к описанию стохастических частиц, когда детерминированная частица рассматривается как частный случай стохастической частицы (с исчезающей стохастичностью). Чтобы реализовать этот подход мы *рассматриваем статистический ансамбль* $\mathcal{E}[\mathcal{S}]$ *как первичный объект (базовый объект) динамики,* тогда как отдельная система $\mathcal{S}$ рассматривается как производный объект динамики. Для осуществления этого подхода полезно ввести собирательное понятие по отношению к понятию динамической системы и стохастической системы. Будет использоваться термин "физическая система". Будем говорить о статистическом ансамбле $\mathcal{E}[\mathcal{S}]$ физических систем $\mathcal{S}$, и при этом неважно, является ли $\mathcal{S}$ динамической системой или стохастической. Чтобы подчеркнуть, что динамическая система и стохастическая система являются частными случаями физической системы, мы будем иногда использовать термин "детерминированная физическая система" вместо термина "динамическая система" и термин "стохастическая физическая система" вместо термина "стохастическая система". Тот факт, что можно получить динамические уравнения для динамической системы $\mathcal{S}$, и их нельзя получить для стохастической системы $\mathcal{S}$, будет рассматриваться как особое свойство статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}]$. Существует формальный критерий, который позволяет определить, являются ли физические системы $\mathcal{S}$, образующие статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}]$, стохастическими системами. (Динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ могут быть приведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, тогда как для $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ такое приведение невозможно). Тот факт, что мы не можем получить описание (динамические уравнения) для отдельной стохастической частицы, не имеет значения, потому что базовым объектом динамики является статистический ансамбль, и мы всегда можем получить описание статистического ансамбля.

Вернемся к действию (1.6) и получим динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ физических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Вариация (1.6) по $\mathbf{u}$ дает

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right] &= \int\int\limits_{V_\xi}\left\{m\mathbf{u}\delta\mathbf{u}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{u}\right\}\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)dtd\boldsymbol{\xi} \\
&= \int\int\limits_{V_\mathbf{x}}\left\{m\mathbf{u}\delta\mathbf{u}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{u}\right\}\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\frac{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}dtd\mathbf{x} \\
&= \int\int\limits_{V_\mathbf{x}}\delta\mathbf{u}\left\{m\mathbf{u}\rho+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\rho\right\}dtd\mathbf{x}-\int\oint\frac{\hbar}{2}\rho\delta\mathbf{u}dtd\mathbf{S}
\end{aligned}$$

где

$$\rho=\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\frac{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}=\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\left(\frac{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}\right)^{-1} \tag{1.9}$$

Получаем следующее динамическое уравнение

$$m\rho\mathbf{u}+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\rho=0, \tag{1.10}$$

Вариация (1.6) по $\mathbf{x}$ дает

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right) \tag{1.11}$$

Здесь d/dt означает субстанциональную производную по времени t

$$\frac{dF}{dt}\equiv\frac{\partial\left(F,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}$$

Заметим, что без потери общности можно положить $\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)=1$, потому что с помощью замены переменных

$$\tilde{\xi}_1=\int\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)d\xi_1,\qquad\tilde{\xi}_2=\xi_2,\qquad\tilde{\xi}_3=\xi_3 \tag{1.12}$$

получаем

$$\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\frac{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}=\frac{\partial\left(\int\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)d\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}=\frac{\partial\left(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,\tilde{\xi}_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)} \tag{1.13}$$

Разрешая (1.10) относительно $\mathbf{u}$, получаем уравнение

$$\mathbf{u}=-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho, \tag{1.14}$$

которое напоминает выражение для средней скорости броуновской частицы с коэффициентом диффузии $D = \hbar/2m$.

Исключая скорость $\mathbf{u}$ из динамических уравнений (1.11) и (1.14), получаем динамические уравнения гидродинамического типа для среднего движения стохастической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla} U_{\mathrm{B}}, \qquad U_{\mathrm{B}} = U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho, \boldsymbol{\nabla}^2\rho\right) = \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho^2} - \frac{\hbar^2}{4m}\frac{\boldsymbol{\nabla}^2\rho}{\rho} \tag{1.15}$$

Здесь ρ рассматривается как функция от $t, \mathbf{x}$, и $\boldsymbol{\nabla}$ есть градиент в пространстве координат $\mathbf{x}$.

Если

$$\frac{\partial\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)} \neq 0 \tag{1.16}$$

и соотношения $\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(t, \boldsymbol{\xi}\right)$ могут быть разрешены относительно переменных $\boldsymbol{\xi}$ в виде $\boldsymbol{\xi} = x\left(t, \mathbf{x}\right)$, динамические уравнения (1.15) могут быть переписаны в эйлеровой форме.

Используя соотношение (1.9), можно переписать обозначение

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}\left(t, \mathbf{x}\right) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial\left(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)} = \frac{\partial\left(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(t, x^1, x^2, x^3\right)}\frac{\partial\left(t, x^1, x^2, x^3\right)}{\partial\left(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)} \tag{1.17}$$

в виде

$$\rho\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}\left(t, \mathbf{x}\right) = \rho\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \rho_0\left(\xi\right)\frac{\partial\left(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(t, x^1, x^2, x^3\right)} \tag{1.18}$$

Подставляя (1.17) в (1.15), получаем эйлерову версию гидродинамических уравнений

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v} = -\frac{1}{m}\boldsymbol{\nabla} U_{\mathrm{B}} \tag{1.19}$$

Вместо определения (1.9) величина ρ в (1.15) и (1.19) рассматривается как $\rho = \rho\left(t, \mathbf{x}\right)$ и определяется из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\rho\mathbf{v}\right) = 0 \tag{1.20}$$

Уравнение непрерывности выполняется тождественно в силу соотношений (1.9) and (1.18).

Два уравнения (1.19), (1.20) описывают эволюцию статистического ансамбля стохастических частиц. Характер стохастичности определяется потенциалом Бома U_{B} [7], определяемым соотношением (1.15). Отсутствуют всякие ссылки на распределение по стохастическим скоростям. Влияние этого распределения на среднее движение частиц описывается видом взаимодействия (1.15). Ситуация напоминает ситуацию в газовой динамике, где влияние распределения Максвелла по скоростям молекул описывается внутренней энергией газа. Разумеется, такое описание не является исчерпывающим, однако оно достаточно для описания среднего движения стохастических частиц. В результате мы получаем *чисто динамическое описание* движения стохастических частиц.

Уравнения для движения идеальной жидкости могут описываться в терминах волновой функции [6]. Потенциальное течение жидкости (1.15) описывается в терминах уравнения Шредингера для свободной квантовой частицы. Это означает:

1. Статистический ансамбль свободных квантовых нерелятивистских частиц может рассматриваться как статистический ансамбль стохастических частиц, который описывается действием (1.8).

2. Волновая функция представляет собой просто способ описания идеальной жидкости, а не специфический квантовой объект, определяемый с помощью таинственных квантовых принципов.

3. Квантовые частицы являются стохастическими частицами, которые могут описываться в терминах динамики физических систем, где базовым объектом является статистический ансамбль.

Таким образом, динамика физических систем позволяет описывать квантовые эффекты без ссылки на квантовые принципы, потому что квантовые частицы, так же как и стохастические системы являются объектами классической динамики физических систем. Описание стохастических и квантовых систем является проблемой классической динамики, где *базовым объектом динамики является статистический ансамбль.*

2 Динамика произвольных физических систем

Действие (1.6) для статистического ансамбля свободных нерелятивистских стохастических частиц может быть легко обобщено на случай произвольных стохастических систем. Пусть $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ есть действие для детерминированной физической системы, имеющей конечное число степеней свободы. Состояние системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ описывается обобщенными координатами $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, ...x^n\}$. Действие имеет вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{d}}}[\mathbf{x}] = \int L_{\mathrm{d}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, P)\, dt, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, а P суть некоторые параметры системы (например, массы, заряды, и т.д.).

Статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ описывается действием

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]}[\mathbf{x}] = \int \int_{V_{\boldsymbol{\xi}}} L_{\mathrm{d}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, P)\, \rho_0(\boldsymbol{\xi})\, dt d^n\xi, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) = \{x^1(t, \boldsymbol{\xi}), x^2(t, \boldsymbol{\xi}), ...x^n(t, \boldsymbol{\xi})\}$. Переменные $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, ...\xi_n\}$ маркируют элементы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ статистического ансамбля. Величина $\rho_0(\boldsymbol{\xi})$ является весовой функцией. Число k маркирующих переменных выбрано равным числу n обобщенных координат, для того чтобы можно было перейти к независимым переменным $t, \mathbf{x}$, разрешая уравнения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$ в виде $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x})$. Если мы не собираемся переходить к независимым переменным $t,\mathbf{x}$, натуральное число k можно выбрать произвольно.

Если на детерминированную систему $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ воздействует некоторый дестабилизирующий агент, она превращается в стохастическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, и действие(2.2) превращается в действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\mathbf{x},u]=\int\int\limits_{V_{\boldsymbol{\xi}}}L\left(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},P_{\mathrm{eff}}\left(u\right)\right)\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)dtd^n\xi,\qquad\dot{\mathbf{x}}\equiv\frac{d\mathbf{x}}{dt}\tag{2.3}$$

где $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$ и $u^k=\left\{u^k\left(t,\mathbf{x}\right)\right\}$, $k=0,1,...n$, являются зависимыми переменными. Новые зависимые переменные u^k описывают среднее значение стохастической составляющей скорости $\dot{\mathbf{x}}$. Предполагается, что дестабилизирующий агент изменяет значения параметров динамической системы S_{d}. Лагранжиан $L\left(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},P_{\mathrm{eff}}\left(u\right)\right)$ для статистического ансамбля соответствующих стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ получается из лагранжиана $L_{\mathrm{d}}\left(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},P\right)$ для статистического ансамбля динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ с помощью замены [8]

$$P\rightarrow P_{\mathrm{eff}}\left(u\right)\tag{2.4}$$

в выражении (2.2). Переходя к описанию стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, мы *не вводим вероятностных структур и описание остается чисто динамическим*. Характер стохастичности определяется видом замены (2.4).

В случае, когда динамической системой $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ является свободная незаряженная релятивистская частица, масса частицы m является единственным параметром P. Если стохастическим агентом является дисторсия пространственно-временной геометрии, замена (2.4) имеет вид

$$m\rightarrow m_{\mathrm{eff}}=\sqrt{m^2+\frac{\hbar^2}{c^2}\left(g_{kl}\kappa^k\kappa^l+\partial_k\kappa^k\right)}\tag{2.5}$$

где c есть скорость света, g_{kl} =diag$\{c^2,-1,-1,-1\}$ есть метрический тензор,

$$\kappa^k=\frac{m}{\hbar}u^k,\qquad k=0,1,2,3\tag{2.6}$$

и $u^k\left(t,\mathbf{x}\right)=u^k\left(x\right)$ есть среднее значение стохастической составляющей 4-скорости частицы. Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование: по латинским $0-3$ и по греческим $1-3$.

В релятивистском случае действие для статистического ансамбля (2.3) имеет вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[x,\kappa]=-\int\int\limits_{V_{\boldsymbol{\xi}}}mcK\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)d\tau d\boldsymbol{\xi},\qquad\dot{\mathbf{x}}\equiv\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\tag{2.7}$$

$$K=\sqrt{1+\lambda^2\left(g_{kl}\kappa^k\kappa^l+\partial_k\kappa^k\right)},\qquad\lambda=\frac{\hbar}{mc}\tag{2.8}$$

где $x=\left\{x^k\right\}=\left\{x^k\left(\tau,\boldsymbol{\xi}\right)\right\}$, $k=0,1,2,3$. Величина g_{kl} =d iag$\{c^2,-1,-1,-1\}$ есть метрический тензор. Независимые переменные $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ маркируют частицы статистического ансамбля. Зависимые переменные $\kappa^k = \kappa^k(x)$, $k = 0,1,2,3$ образуют некоторое силовое поле, связанное со стохастической составляющей 4-скорости частицы, и λ есть комптоновская длина волны частицы.

В нерелятивистском приближении можно пренебречь временной составляющей $\kappa^0 = \frac{m}{\hbar}u^0$ по сравнению с пространственной $\boldsymbol{\kappa} = \frac{m}{\hbar}\mathbf{u}$. Полагая $\tau = t = x^0$ в (2.7), (2.8) получаем вместо (2.7)

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}[\mathbf{x},\mathbf{u}] = \int\int_{V_{\boldsymbol{\xi}}} \left\{-mc^2 + \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{m}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}\rho_0(\boldsymbol{\xi})\, dt d\boldsymbol{\xi}, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{2.9}$$

Действие (2.9) совпадает с действием (1.6) за исключением первого члена, который не дает вклада в динамические уравнения.

В релятивистском случае вариация (2.7) по κ^i, дает динамические уравнения

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\kappa^i} = -\lambda^2\frac{mc\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\rho_0(\boldsymbol{\xi})}{K}g_{ik}\kappa^k + \lambda^2\partial_i\frac{mc\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\rho_0(\boldsymbol{\xi})}{2K} = 0 \tag{2.10}$$

Эти уравнения интегрируются в виде

$$\kappa = \frac{1}{2}\log\frac{C\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\rho_0(\boldsymbol{\xi})}{K}, \qquad C = \text{const} \tag{2.11}$$

где величина κ является потенциалом для поля κ^k

$$\partial_k\kappa = g_{kl}\kappa^l, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{2.12}$$

Динамическое уравнение (2.11) можно переписать в виде

$$e^{2\kappa} = C\frac{\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\sqrt{1+\lambda^2 g^{ls}e^{-\kappa}\partial_k\partial^k e^{\kappa}}}, \qquad C = \text{const} \tag{2.13}$$

Оно является аналогом нерелятивистского динамического уравнения (1.14).

Главное различие между нерелятивистским описанием (1.14) и релятивистским описанием (2.13) следующее. Нерелятивистское уравнение (1.14) не содержит временных производных, и поле $\mathbf{u}$ однозначно определяется своим источником (плотность частиц ρ). Релятивистское уравнение (2.13) содержит временные производные, и κ-поле $u^k = \hbar\kappa^k/m$ может существовать без своего источника. Релятивистское κ-поле $u^k = \hbar\kappa^k/m$ может отрываться от своего источника. Кроме того, κ-поле изменяет эффективную массу частицы, как это можно видеть из соотношений (2.5) или (2.7), (2.8). Если $\boldsymbol{\kappa}^2$ достаточно велико, или $\partial_k\kappa^k < 0$ и $\left|\partial_k\kappa^k\right|$ достаточно велико, то эффективная масса частицы может стать мнимой. В этом случае средняя мировая линия может изменить направление во времени, и этот поворот может оказаться связанным с рождением или аннигиляцией пар.

В нерелятивистском случае среднее значение $\mathbf{u}$ стохастической составляющей скорости может быть исключено и заменено источником (плотностью частиц ρ). В релятивистском случае κ-поле имеет дополнительно собственные степени свободы, которые не могут быть исключены с помощью замены κ-поля его источником. κ-поле может перемещаться из одной пространственно-временной области в другую.

Единый формализм динамики (со статистическим ансамблем в качестве базового объекта динамики) позволяет описывать такие физические явления, которые не могут быть описаны в рамках традиционного формализма динамики, когда базовым объектом является динамическая система с конечным числом степеней свободы. В частности, можно описывать эффект рождения пар, который нельзя описывать ни в рамках классической релятивистской механики, ни в рамках нерелятивистской квантовой механики.

3 Среднестатистическая физическая система

Пусть $\mathcal{S}$ является физической системой, и $\mathcal{E}\left[N, \mathcal{S}\right]$ есть статистический ансамбль, составленный из N ($N \to \infty$) физических систем $\mathcal{S}$. Пусть $\mathcal{A}_{\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]}$ есть функционал действия для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[N, \mathcal{S}\right]$. Поскольку статистический ансамбль состоит из тождественных независимых систем, его действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]}$ обладает свойством

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[aN,\mathcal{S}]} = a\mathcal{A}_{\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]}, \qquad a > 0, \qquad a = \text{const}, \qquad N, aN \gg 1 \tag{3.1}$$

Основываясь на этом свойстве, можно ввести такой статистический ансамбль $\langle\mathcal{S}\rangle$, действие $\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}\rangle}$ которого имеет вид

$$\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}\rangle} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathcal{A}_{\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]} \tag{3.2}$$

Детерминированную физическую систему, чье действие имеет вид (3.2), мы будем называть *среднестатистической системой* $\langle\mathcal{S}\rangle$. Физическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ является динамической системой, потому что она детерминированная и описывается действием $\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}\rangle}$. Это усредненная система, потому что ее действие $\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}\rangle}$ является средним действием для любой системы $\mathcal{S}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[N, \mathcal{S}\right]$. В соответствии с определением (3.2) система $\langle\mathcal{S}\rangle$ является статистическим ансамблем $\mathcal{E}\left[N, \mathcal{S}\right]$, нормированным на одну систему. В согласии со свойством (3.1) определение (3.2) действия $\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}\rangle}$ инвариантно относительно преобразования

$$N \to aN, \qquad a > 0, \qquad a = \text{const} \tag{3.3}$$

Формально среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ может рассматриваться как статистический ансамбль, состоящий из одной системы $\mathcal{S}$. Тем не менее, в соответствии с (3.2) среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ обладает статистическими свойствами, потому что действие для $\langle\mathcal{S}\rangle$ является действием, построенным из действия для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[N, \mathcal{S}\right]$ с очень большим числом N элементов ($N \to \infty$).

Будучи статистическим ансамблем, среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ обладает некоторыми свойствами индивидуальной системы $\mathcal{S}$. В частности, энергия E, импульс $\mathbf{p}$ и другие аддитивные величины $\langle\mathcal{S}\rangle$ совпадают соответственно со средней энергией $\langle E\rangle$, средним импульсом $\langle\mathbf{p}\rangle$ и средними значениями других аддитивных величин отдельной системы $\mathcal{S}$. Другими словами, в некоторых аспектах среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ воспринимается как отдельная система $\mathcal{S}$. С другой стороны, среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ не совпадает с $\mathcal{S}$, если даже отдельная система $\mathcal{S}$ является детерминированной физической системой.

Например, пусть отдельная детерминированная система $\mathcal{S}$ имеет n степеней свободы. Пусть в определении (3.2) число N элементов статистического ансамбля $\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]$ очень велико, но конечно. В это случае среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ имеет nN степеней свободы. Среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ может одновременно обладать альтернативными свойствами отдельной системы $\mathcal{S}$. Например, пусть $\mathcal{S}$ является отдельной частицей в двух-щелевом эксперименте. Индивидуальная частица $\mathcal{S}$ может проходить только через одну из двух открытых щелей, тогда как среднестатистическая частица $\langle\mathcal{S}\rangle$ может проходить одновременно через обе щели. Состояние nk степеней свободы среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ соответствует прохождению через одну щель, тогда как состояние $n(N-k)$ степеней свободы среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ соответствует прохождению через другую щель.

4 Методы описания статистического ансамбля

Здесь мы рассмотрим четыре различных метода описания статистического ансамбля: (1) описание в лагранжевых координатах, (2) описание в эйлеровых координатах, (3) описание в терминах обобщенной функции тока, (4) описание в терминах волновой функции. Мы продемонстрируем применение этих методов на примере нерелятивистской стохастической частицы, движущейся в заданном внешнем потенциале $V(\mathbf{x})$. В этом случае действие (1.6) принимает вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\mathbf{x},\mathbf{u}]=\int\int_{V_\xi}\left\{\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2-V(\mathbf{x})+\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}\rho_0(\boldsymbol{\xi})\,dtd\boldsymbol{\xi},\qquad \dot{\mathbf{x}}\equiv\frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{4.1}$$

где $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$. После исключения переменной $\mathbf{u}$ получаем вместо (1.15)

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=-\boldsymbol{\nabla}V(\mathbf{x})-\boldsymbol{\nabla}U_{\mathrm{B}} \tag{4.2}$$

где

$$U_{\mathrm{B}}=U\left(\rho,\boldsymbol{\nabla}\rho,\boldsymbol{\nabla}^2\rho\right)=\frac{\hbar^2}{8m\rho}\left(\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho}-2\boldsymbol{\nabla}^2\rho\right)=-\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}}\boldsymbol{\nabla}^2\sqrt{\rho} \tag{4.3}$$

$$\rho=\rho_0(\boldsymbol{\xi})\left(\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}\right)^{-1} \tag{4.4}$$

Чтобы исключить дифференцирование по $\mathbf{x}$ и записать динамические уравнения (4.2) в независимых переменных $t,\boldsymbol{\xi}$, введем переменную

$$R=\frac{\rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\rho}=\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}=\det\left|\left|x^{\alpha,\beta}\right|\right|,\qquad \alpha,\beta=1,2,3 \tag{4.5}$$

как трехлинейную функцию переменных $x^{\alpha,\beta}\equiv\partial x^\alpha/\partial\xi_\beta$. Примем во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial\xi_\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x^{\alpha,\beta}}\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}, \tag{4.6}$$

Тогда получаем динамические уравнения (4.2) в виде

$$m\ddot{x}^{\alpha}=-\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\hbar^2}{2mR}\frac{\partial R}{\partial x^{\alpha,\beta}}\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\left[\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\partial R}{\partial x^{\mu,\nu}}\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x^{\mu,\sigma}}\frac{\partial}{\partial\xi_\sigma}\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right],\qquad \alpha=1,2,3 \tag{4.7}$$

В терминах независимых переменных $t,\boldsymbol{\xi}$ среднее значение $\mathbf{u}$ стохастической скорости имеет вид

$$u^{\alpha}(t,\boldsymbol{\xi})=-\frac{\hbar}{2m\rho_0(\boldsymbol{\xi})}\frac{\partial R}{\partial x^{\alpha,\beta}}\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\frac{\rho_0(\boldsymbol{\xi})}{R} \tag{4.8}$$

Итак, в лагранжевых переменных $t,\boldsymbol{\xi}$ динамические уравнения для статистического ансамбля стохастических (квантовых) частиц довольно громоздки. Однако, если частицы детерминированные, и $\hbar=0$, динамические уравнения (4.7) превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения

$$m\ddot{\mathbf{x}}=-\boldsymbol{\nabla}V(\mathbf{x}),\qquad \mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi}) \tag{4.9}$$

Если в динамических уравнениях (4.9) переменные $\mathbf{x}$ не зависят от $\boldsymbol{\xi}$, они являются динамическими уравнениями для отдельной классической частицы. Чтобы перейти от уравнения (4.9) для отдельной частицы, описываемой переменной $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$, к динамическим уравнениям (4.7), т.е. "проквантовать классическую частицу", нужно рассмотреть статистический ансамбль, (заменить $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ на $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$) и добавить два последних члена, содержащих квантовую постоянную. Таким образом, традиционное квантование может рассматриваться как некая динамическая процедура, вводящая дополнительные члены в действие для статистического ансамбля. Для такого квантования квантовые принципы не нужны хотя бы потому, что здесь не используется понятие волновой функции, а квантовые принципы нужны только для того, чтобы объяснить, что такое волновая функция.

Если выполнено соотношение (1.16) и соотношения $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$ могут быть разрешены относительно переменных $\boldsymbol{\xi}$ в виде $\boldsymbol{\xi}=x(t,\mathbf{x})$, динамические уравнения (4.9) могут быть переписаны в эйлеровых переменных в виде (1.19), (1.20)

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{m}\boldsymbol{\nabla}\left(U\left(\rho,\boldsymbol{\nabla}\rho,\boldsymbol{\nabla}^2\rho\right)+V(\mathbf{x})\right) \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{4.11}$$

где $\rho=\rho(t,\mathbf{x})$, $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$. В эйлеровых переменных динамические уравнения для статистического ансамбля проще, чем в лагранжевых координатах. В то же время они довольно наглядны. Чтобы получить средние траектории стохастических частиц, нужно решить динамические уравнения (4.10), (4.11). Когда переменные $\rho=\rho(t,\mathbf{x})$, $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ станут известны, нужно еще решить обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) \tag{4.12}$$

Чтобы получить динамические уравнения в форме Гамильтона-Якоби, нужно проинтегрировать динамические уравнения (4.10), (4.11) и переформулировать их в терминах гидродинамических потенциалов (потенциалы Клебша [10, 11]). Гидродинамические потенциалы $\boldsymbol{\xi}$ можно рассматривать как обобщенную функцию тока, потому что они обладают свойствами функции тока: (1) они маркируют мировые линии жидких частиц и (2) некоторые комбинации производных от $\boldsymbol{\xi}$ тождественно удовлетворяют уравнению непрерывности для любых значений $\boldsymbol{\xi}$.

Для осуществления интегрирования динамических уравнений, вернемся к действию (4.1), которое теперь имеет вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}[\mathbf{x}] = \int\int\limits_{V_{\boldsymbol{\xi}}} \left\{ \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 - V(\mathbf{x}) - U_{\rm B} \right\} \rho_0(\boldsymbol{\xi})\, dt d\boldsymbol{\xi} \tag{4.13}$$

где $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$. Переменные ρ и $U_{\rm B} = U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho, \boldsymbol{\nabla}^2\rho\right)$ определяются соотношением (4.3).

Чтобы преобразовать действие (4.13) к независимым переменным $x = \left\{x^k\right\} = \{t, \mathbf{x}\}$, используем параметрическое представление средних мировых линий $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$. Пусть

$$x^k = x^k(\xi_0, \boldsymbol{\xi}) = x^k(\xi), \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{4.14}$$

где $\xi = \{\xi_k\} = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Форма мировой линии описывается с помощью x^k, рассматриваемого как функция ξ_0 при фиксированных $\boldsymbol{\xi}$. Действие (4.13) может быть переписано в виде

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}[x] = \int\limits_{V_{\boldsymbol{\xi}}} \left\{ \frac{m}{2}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_0}\right)^2 \left(\frac{\partial x^0}{\partial\xi_0}\right)^{-1} - (V(x) + U_{\rm B})\frac{\partial x^0}{\partial\xi_0} \right\} \rho_0(\boldsymbol{\xi})\, d^4\xi, \tag{4.15}$$

Будем рассматривать переменные $\xi = \{\xi_k\}$, $k = 0, 1, 2, 3$ как зависимые переменные, а переменные $x = \left\{x^k\right\}$ как независимые. Введем в рассмотрение

$$J = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det\left|\left|\xi_{l,k}\right|\right|, \qquad \xi_{l,k} \equiv \frac{\partial\xi_l}{\partial x^k} \qquad l, k = 0, 1, 2, 3 \tag{4.16}$$

как четырехлинейную функцию переменных $\xi_{l,k} \equiv \partial_k\xi_l$, $l, k = 0, 1, 2, 3$. Примем во внимание, что

$$\frac{\partial x^k}{\partial\xi_0} = \frac{\partial\left(x^k, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \frac{\partial\left(x^k, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} = J^{-1}\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}} \tag{4.17}$$

и

$$\rho = \rho_0(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \rho_0(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial(x^0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \rho_0(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,0}} \tag{4.18}$$

Действие (4.15) принимает вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}[\xi] = \int\limits_{V_x} \left\{ \frac{m}{2}\left(\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,\alpha}}\right)^2 \left(\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,0}}\right)^{-2} - V(x) - U_{\rm B} \right\} \rho d^4x \tag{4.19}$$

$$\rho \equiv \rho_0 (\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}$$

Из (1.15) следует, что

$$\rho U_{\mathrm{B}} = \rho U \left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho, \boldsymbol{\nabla}^2\rho\right) = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho} - \frac{\hbar^2}{4m} \boldsymbol{\nabla}^2 \rho \tag{4.20}$$

Последний член выражения (4.20) имеет вид дивергенции и не дает вклада в динамические уравнения. Этот член может быть опущен.

Если выполнено соотношение(1.16)

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \neq 0 \tag{4.21}$$

то вариационные проблемы (4.15) и (4.19) эквивалентны. Наоборот, если соотношение (4.21) нарушено, то нельзя быть уверенным в их эквивалентности.

Теперь введем обозначение $j = \{j^0, \mathbf{j}\} = \{\rho, \mathbf{j}\} = \left\{j^k\right\}$, $k = 0, 1, 2, 3$

$$j^k = \rho_0 (\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \left(x^k, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)} = \rho_0 (\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{4.22}$$

и добавим обозначение (4.22) к действию (4.19) с помощью множителей Лагранжа p_k, $k = 0, 1, 2, 3$. Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]} [\xi, j, p] = \int\limits_{V_x} \left\{ m \frac{\mathbf{j}^2}{2\rho} - V(x)\rho - \rho U_{\mathrm{B}} - p_k \left(j^k - \rho_0 (\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \right) \right\} d^4 x, \tag{4.23}$$

$$U_{\mathrm{B}} = U \left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho, \boldsymbol{\nabla}^2\rho\right), \qquad \rho \equiv j^0$$

Заметим, что действие (4.19) и (4.23) описывают одну и ту же вариационную проблему. Действие (4.23) интересно в том отношении, что лагранжевы координаты $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$ сконцентрированы в последнем члене действия. Лагранжевы координаты $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$ определены с точностью до преобразования

$$\xi_0 = f_0 \left(\tilde{\xi}_0\right), \qquad \xi_\alpha = f_\alpha \left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}\right), \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{4.24}$$

где f_k, $k = 0, 1, 2, 3$ – произвольные функции. Переменная ξ_0 фиктивна, и вариация по ξ_0 не дает независимого динамического уравнения.

Вариация действия (4.23) по ξ_l, $l = 0, 1, 2, 3$ приводит к динамическим уравнениям

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}}{\delta \xi_l} = -\partial_s \left(\rho_0 (\boldsymbol{\xi}) p_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{l,s}} \right) + p_k \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi_l} (\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0, \qquad l = 0, 1, 2, 3 \tag{4.25}$$

Используя тождества

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} \xi_{k,l} \equiv J \delta_k^i, \qquad \partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{l,s}} \equiv J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}} \right) \tag{4.27}$$

получаем из (4.25)

$$-\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{l,s}} \rho_0 \partial_s p_k - \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{l,s}} \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi_j} \xi_{j,s} p_k + p_k \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi_l} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0, \qquad l = 0, 1, 2, 3$$

$$-J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}} \right) \rho_0 (\boldsymbol{\xi}) \partial_s p_k - \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \delta_j^l - \delta_j^0 \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}} \right) \frac{\partial \rho_0 (\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} p_k$$
$$+ p_k \frac{\partial \rho_0 (\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_l} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0, \qquad l = 0, 1, 2, 3 \tag{4.28}$$

Упрощая (4.28) с помощью первого тождества (4.26), получаем

$$J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}} \right) \rho_0 \partial_s p_k = 0 \tag{4.29}$$

Свертывая (4.29) с $\xi_{l,i}$ и используя первое тождество (4.26) вместе с обозначениями (4.22), получаем

$$j^k \partial_i p_k - j^k \partial_k p_i = 0, \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{4.30}$$

Варьирование (4.23) по j^β дает

$$p_\beta = m \frac{j^\beta}{\rho}, \qquad \beta = 1, 2, 3 \tag{4.31}$$

Варьируя (4.23) по $j^0 = \rho$, используя обозначения

$$\rho_\gamma \equiv \partial_\gamma \rho, \qquad \rho_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha \partial_\beta \rho$$

и принимая во внимание соотношение (4.3) для $U_{\text{B}} = U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho, \boldsymbol{\nabla}^2\rho\right)$, получаем

$$\begin{aligned} p_0 &= -\frac{m}{2\rho^2} j^\alpha j^\alpha - V(x) - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho U_{\text{B}}) + \partial_\gamma \frac{\partial}{\partial \rho_\gamma} (\rho U_{\text{B}}) - \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial}{\partial \rho_{\alpha\beta}} (\rho U_{\text{B}}) \\ &= -\frac{m}{2\rho^2} j^\alpha j^\alpha - V(x) - U_{\text{B}} \end{aligned} \tag{4.32}$$

Отметим замечательное свойство потенциала Бома $U_{\text{B}} = U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho, \boldsymbol{\nabla}^2\rho\right)$, определенного соотношением (4.3). Величина p_0 выражается через $U_{\text{B}} = U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho, \boldsymbol{\nabla}^2\rho\right)$ так, как если бы выражение $U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho, \boldsymbol{\nabla}^2\rho\right)$ не зависело от ρ и его производных.

Исключая p_k из уравнений (4.30) при помощи соотношений (4.31), (4.32) и полагая $\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho$, получаем динамические уравнения в эйлеровой форме (4.10).

Имеется другая возможность. Динамические уравнения (4.29) можно рассматривать как линейные дифференциальные уравнения в частных производных относительно переменных p_k. Они могут быть решены в виде

$$p_k = b_0 \left(\partial_k \varphi + g^\alpha (\boldsymbol{\xi}) \partial_k \xi_\alpha \right), \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{4.33}$$

где $g^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1,2,3$ суть произвольные функции аргументов $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, $b_0 \neq 0$ является произвольной вещественной постоянной, и φ является переменной ξ_0, которая перестала быть фиктивной. Заметим, что постоянную b_0 можно исключить, включив ее в функции $\mathbf{g} = \{g^1, g^2, g^3\}$ и в переменную φ.

Можно проверить прямой подстановкой, что соотношение (4.33) является общим решением линейных уравнений (4.29). Подставляя (4.33) в (4.29) и принимая во внимание антисимметрию скобки в (4.29) по отношению к перестановке индексов k и s, получаем

$$J^{-1}\rho_0(\boldsymbol{\xi})\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}}\right)\frac{\partial g^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_{\mu}}\xi_{\mu,s}\xi_{\alpha,k} = 0 \tag{4.34}$$

Соотношение (4.34) есть верное равенство, как это следует из первого тождества (4.26).

Подставим (4.33) в действие (4.23). Принимая во внимание первое тождество (4.26) и опуская член

$$\rho_0(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}\partial_k\varphi = \rho_0(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial(\varphi, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\varphi, \boldsymbol{\xi}, j] = \int \left\{\frac{m}{2}\frac{j^{\alpha}j^{\alpha}}{j^0} - V(x)\rho - U_{\mathrm{B}}\rho - j^k b_0\left(\partial_k\varphi + g^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\partial_k\xi_{\alpha}\right)\right\} d^4x, \qquad j^0 \equiv \rho \tag{4.35}$$

Варьирование (4.35) по $j^0 \equiv \rho$ дает

$$-\frac{m\mathbf{j}^2}{2\rho^2} - V(x) - U_{\mathrm{B}} - b_0\left(\partial_0\varphi + g^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\partial_0\xi_{\alpha}\right) = 0, \qquad U_{\mathrm{B}} = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2} - 2\frac{\boldsymbol{\nabla}^2\rho}{\rho}\right) \tag{4.36}$$

Варьирование по j^{μ} дает

$$m\frac{j^{\mu}}{\rho} = b_0\left(\partial_{\mu}\varphi + g^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\partial_{\mu}\xi_{\alpha}\right) \tag{4.37}$$

Варьирование по φ дает

$$\partial_k j^k = 0 \tag{4.38}$$

Наконец, варьируя (4.35) по ξ_{μ} и принимая во внимание (4.38), получаем

$$b_0 j^k \Omega^{\alpha\mu}(\boldsymbol{\xi})\partial_k\xi_{\alpha} = 0, \qquad \Omega^{\alpha\mu}(\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\partial g^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_{\mu}} - \frac{\partial g^{\mu}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_{\alpha}}\right) \tag{4.39}$$

Если

$$\det ||\Omega^{\alpha\mu}|| \neq 0 \tag{4.40}$$

то, учитывая, что скорость $\mathbf{v} = \mathbf{j}/j^0$, получаем из (4.39), так называемые условия Лина [13]

$$\partial_0\boldsymbol{\xi} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{4.41}$$

которые означают, что переменные $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ постоянны вдоль средних мировых линий частиц. Другими словами, переменные $\boldsymbol{\xi}$ являются лагранжевыми координатами, которые маркируют средние мировые линии частиц.

Однако, условия (4.40) не всегда выполняются. В частности, $\Omega^{\alpha\beta} \equiv 0$ в случае потенциального течения. Кроме того матрица $\Omega^{\alpha\beta}$ антисимметрична, как это следует из второго соотношения (4.39), и

$$\det\left|\left|\Omega^{\alpha\beta}\right|\right| = \begin{vmatrix} 0 & \Omega^{12} & \Omega^{13} \\ -\Omega^{12} & 0 & \Omega^{23} \\ -\Omega^{13} & -\Omega^{23} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{4.42}$$

Заметим, что тождество (4.42) является свойством трехмерного пространства. В двумерном пространстве $\det\left|\left|\Omega^{\alpha\beta}\right|\right| = \left(\Omega^{12}\right)^2$. в случае четырехмерного пространства имеем

$$\det\left|\left|\Omega^{\alpha\beta}\right|\right| = \left(\Omega^{12}\Omega^{34} - \Omega^{13}\Omega^{24} + \Omega^{14}\Omega^{23}\right)^2$$

Кажется странным и неожиданным, что условия Лина (4.41) не являются следствием динамического уравнения (4.39), хотя условия Лина (4.41) совместны с динамическим уравнением (4.39). В случае потенциального течения гидродинамические уравнения Эйлера для идеальной жидкости могут быть получены из вариационного принципа [14] без использования условий Лина. В случае завихренного течения той же самой жидкости гидродинамические уравнения Эйлера могут быть получены из вариационного принципа, только когда условия Лина введены в функционал действия как сторонние условия, и переменные $\boldsymbol{\xi}$ рассматриваются как динамические переменные [13]. Означает ли это, что лагранжевы координаты $\boldsymbol{\xi}$ являются неполноценными динамическими переменными? Может быть. Это пока не ясно.

Из уравнений (4.36) - (4.41) получаем пять уравнений

$$-m\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha}\right)^2}{2\rho^2} - V\left(x\right) - U_{\mathrm{B}} - \left(\partial_0\varphi + g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\partial_0\xi_{\alpha}\right) = 0, \tag{4.43}$$

$$\partial_0\boldsymbol{\xi} + \left(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{4.44}$$

$$\partial_0\rho + \boldsymbol{\nabla}\left(\rho\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha}\right)}{m}\right) \tag{4.45}$$

для пяти динамических переменных $\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}$. Неопределенные функции $\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \{g^1\left(\boldsymbol{\xi}\right), g^2\left(\boldsymbol{\xi}\right), g^3\left(\boldsymbol{\xi}\right)\}$ определяются из начальных значений для скорости $\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho$. Постоянная b_0 включена в неопределенные функции $\varphi, \mathbf{g}\left(\boldsymbol{\xi}\right)$. Скорость $\mathbf{v}$ выражается через динамические переменные $\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}$ при помощи соотношений

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{\rho} = \frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha}\right)}{m} \tag{4.46}$$

5 Смысл произвольных функций $\mathbf{g} = \left\{g^1, g^2, g^3\right\}$

Произвольные функции $\mathbf{g} = \{g^1\left(\boldsymbol{\xi}\right), g^2\left(\boldsymbol{\xi}\right), g^3\left(\boldsymbol{\xi}\right)\}$ могут быть получены из начальных значений гидродинамических переменных ρ, $\mathbf{v}$. Пусть в начальный момент $t = 0$

$$\rho\left(0, \mathbf{x}\right) = \rho_{\mathrm{in}}\left(\mathbf{x}\right), \qquad \mathbf{v}\left(0, \mathbf{x}\right) = \mathbf{v}_{\mathrm{in}}\left(\mathbf{x}\right) \tag{5.1}$$

Выберем начальные значения для маркировки в виде

$$\boldsymbol{\xi}(0,\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_{\rm in}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \qquad \varphi(0,\mathbf{x}) = \varphi_{\rm in}(\mathbf{x}) = 0 \tag{5.2}$$

Полагая $t = 0$ в (4.46), (4.18) и принимая во внимание (5.1) и (5.2), получаем соответственно

$$\mathbf{v}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\rm in}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{m} \tag{5.3}$$

$$\rho(0,\mathbf{x}) = \rho_{\rm in}(\mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x})\frac{\partial(\xi_{\rm in1}(\mathbf{x}),\xi_{\rm in2}(\mathbf{x}),\xi_{\rm in3}(\mathbf{x}))}{\partial(x^1,x^2,x^3)} = \rho_0(\mathbf{x}) \tag{5.4}$$

Таким образом, произвольные функции $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$ и весовая функция $\rho_0(\boldsymbol{\xi})$ могут быть определены единственным образом через начальные значения $\rho_{\rm in}(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}_{\rm in}(\mathbf{x})$ величин ρ, $\mathbf{v}$.

Исключая функции $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$ из динамических уравнений (4.43) - (4.45) с помощью соотношений (5.3), получаем

$$\partial_0\xi_\alpha + \left(\frac{1}{m}\boldsymbol{\nabla}\varphi + \mathbf{v}_{\rm in}(\boldsymbol{\xi})\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{5.5}$$

$$\partial_0\varphi + \frac{(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2}{2m} + \frac{m(\mathbf{v}_{\rm in}(\boldsymbol{\xi})\partial_\alpha\boldsymbol{\xi})(\mathbf{v}_{\rm in}(\boldsymbol{\xi})\partial_\alpha\boldsymbol{\xi})}{2} - mv_{\rm in}^\alpha(\boldsymbol{\xi})\mathbf{v}_{\rm in}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha + V(x) + U_{\rm B}(\rho) = 0 \tag{5.6}$$

$$\partial_0\rho + \boldsymbol{\nabla}\left(\rho\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{\nabla}\varphi + v_{\rm in}^\beta(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\nabla}\xi_\beta\right)\right) = 0 \tag{5.7}$$

Начальные значения $\boldsymbol{\xi}_{\rm in}(\mathbf{x})$, $\varphi_{\rm in}(\mathbf{x})$ гидродинамических потенциалов $\boldsymbol{\xi}$, φ могут быть выбраны универсально для всех течений., например, в виде (5.2). Это означает, что уравнения (4.44), (4.45) являются по существу уравнениями, описывающими эволюцию маркировки при фиксированной динамике.

6 Описание в терминах комплексного потенциала

Можно образовать комплексный потенциал ψ из потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}$, φ и плотности ρ. Этот комплексный потенциал известен как волновая функция, или ψ-функция. С помощью замены переменных действие (4.35) может быть преобразовано к описанию в терминах волновой функции [6]. Введем k-компонентную комплексную функцию $\psi = \{\psi_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,...k$, определив ее соотношениями

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad \psi_\alpha^* = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi}u_\alpha^*(\boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1,2,...k \tag{6.1}$$

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^k \psi_\alpha^*\psi_\alpha \tag{6.2}$$

где (*) означает комплексное сопряжение, $u_\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha=1,2,...k$ суть функции только переменных $\boldsymbol{\xi}$. Они удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}(u_\alpha^*\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi_\beta}-\frac{\partial u_\alpha^*}{\partial\xi_\beta}u_\alpha)=g^\beta(\boldsymbol{\xi}),\qquad \beta=1,2,...k\qquad \sum_{\alpha=1}^{k}u_\alpha^*u_\alpha=1 \tag{6.3}$$

где k такое натуральное число, что уравнения (6.3) допускают решение. Вообще говоря, k висит от вида произвольных функций $\mathbf{g}=\{g^\beta(\boldsymbol{\xi})\}$, $\beta=1,2,3$.

Легко проверить, что

$$\rho=\psi^*\psi,\qquad p_l=-\frac{ib_0}{2\psi^*\psi}(\psi^*\partial_l\psi-\partial_l\psi^*\cdot\psi),\qquad l=0,1,2,3 \tag{6.4}$$

Вариационная проблема с действием (4.35) оказывается эквивалентной [6] вариационной проблеме с функционалом действия

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\psi,\psi^*] &= \int\left\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\psi)+\frac{b_0^2(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi-\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi)^2}{8m\psi^*\psi}\right.\\ &\left.-\frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\left(\psi^*\psi\right)\right)^2}{\psi^*\psi}-V\left(x\right)\psi^*\psi\right\}\mathrm{d}^4x\end{aligned} \tag{6.5}$$

где $\boldsymbol{\nabla}=\{\partial_\alpha\}$, $\alpha=1,2,3$.

Рассмотрим случай, когда число k составляющих волновой функции равно 2. В этом случае волновая функция $\psi=\left\{\begin{smallmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{smallmatrix}\right\}$ имеет четыре вещественные составляющие. Число гидродинамических переменных ρ, $\mathbf{v}$ также равно четырем, и можно надеяться, что первые три уравнения (6.3) могут быть решены при любом выборе функций $\mathbf{g}$. Для двухкомпонентной волновой функции ψ имеет место тождество

$$(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi-\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi)^2\equiv-4\rho\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi+(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2+4\rho^2\sum_{\alpha=1}^{3}(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha)^2 \tag{6.6}$$

где

$$\rho=\psi^*\psi,\qquad s_\alpha=\frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho},\qquad \alpha=1,2,3 \tag{6.7}$$

σ_α суть 2×2 матрицы Паули

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

Подставляя (6.6) в (6.5), получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\psi,\psi^*] &= \int\left\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi)-\frac{b_0^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi+\frac{b_0^2}{8m}\rho\left(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha\right)^2\right.\\ &\left.+\frac{b_0^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho}-\frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho}-V\left(x\right)\psi^*\psi\right\}\mathrm{d}^4x\end{aligned} \tag{6.9}$$

Если выбрать произвольную постоянную b_0 в виде $b_0 = \hbar$, действие (6.9) принимает вид

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^*] = \int \left\{ \frac{i\hbar}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) - \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + \frac{\hbar^2}{8m}\rho\boldsymbol{\nabla}s_\alpha\boldsymbol{\nabla}s_\alpha - V(x)\rho \right\} \mathrm{d}^4x \qquad (6.10)$$

В случае, когда волновая функция ψ имеет одну составляющую, например, $\psi = \left\{\begin{smallmatrix}\psi_1\\0\end{smallmatrix}\right\}$, величины $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ постоянны ($s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ \ s_3 = 1$), и действие (6.10) превращается в

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^*] = \int \left\{ \frac{i\hbar}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) - \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi - V(x)\psi^*\psi \right\} \mathrm{d}^4x \qquad (6.11)$$

Динамическое уравнение, порожденное действием (6.11) является уравнением Шредингера

$$i\hbar\partial_0\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi - V(x)\psi = 0 \qquad (6.12)$$

Динамическое уравнение описывает потенциальное течение жидкости.

В общем случае динамическое уравнение, порожденное действием (6.9) имеет вид

$$ib_0\partial_0\psi + \frac{b_0^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi + \frac{b_0^2}{8m}\boldsymbol{\nabla}^2 s_\alpha\cdot(s_\alpha - 2\sigma_\alpha)\psi - \frac{b_0^2}{4m}\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\rho}\boldsymbol{\nabla}s_\alpha\sigma_\alpha\psi - \left(1 - \frac{b_0^2}{\hbar^2}\right)U_{\mathrm{B}}\psi - V(x)\psi = 0 \qquad (6.13)$$

где U_{B} определяется соотношением (4.3). При получении динамического уравнения (6.13), использовались тождества

$$\mathbf{s}^2 \equiv 1, \qquad s_\alpha\boldsymbol{\nabla}s_\alpha \equiv 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}s_\alpha(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha) + s_\alpha\boldsymbol{\nabla}^2 s_\alpha \equiv 0$$

В случае, когда $b_0 = \hbar$ уравнение (6.13) превращается в

$$i\hbar\partial_0\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi - V(x)\psi + \frac{\hbar^2}{8m}\boldsymbol{\nabla}^2 s_\alpha\cdot(s_\alpha - 2\sigma_\alpha)\psi - \frac{\hbar^2}{4m}\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\rho}\boldsymbol{\nabla}s_\alpha\sigma_\alpha\psi = 0 \qquad (6.14)$$

где два последние члена отличают это уравнение от уравнения Шредингера. Эти два члена ответственны за завихренность течения. В соответствии с уравнением Шредингера спин частицы является атрибутом квантовой частицы, и он не влияет на течение статистического ансамбля. В соответствии с уравнением (6.14) точечная бесспиновая частица может иметь спин, порожденный завихренностью течения статистического ансамбля.

Используя замену переменных (6.1), (6.3), мы не использовали то обстоятельство, что решение уравнений (4.39) является решением уравнений (4.41). В случае описания в терминах волновой функции ψ мы не встречаемся с той проблемой, которая возникла при описании в терминах обобщенной функции тока $\boldsymbol{\xi}$, когда имеются такие решения уравнений (4.39), которые не являются решениями уравнений (4.41).

7 Заключительные замечания

В настоящей работе мы пытаемся построить единый формализм для описания физических (стохастических и детерминированных) систем. Статистический ансамбль используется как главный объект динамики. При этом используется тот факт, что статистический ансамбль является непрерывной динамической системой независимо от того, являются ли его элементы стохастическими или динамическими системами. Такой подход позволяет описывать квантовые системы, рассматривая их как стохастические системы и используя при описании *только* принципы классической (а не квантовой) физики. Кроме того единый формализм может быть применен для описания классической невязкой жидкости.

Существование квантовых частиц вместе единым описанием классических и квантовых частиц порождает альтернативу квантовой природе частиц в микромире. В самом деле, квантовая парадигма предполагает описание движения частиц на основе принципов квантовой теории. Квантовые принципы предполагают описание в терминах линейных динамических уравнений для волновых функций, которые вводятся аксиоматически. В модельной концепции, когда волновая функция представляет собой просто способ описания идеальной сплошной среды (статистического ансамбля), динамические уравнения оказываются линейными только для потенциального течения среды. В случае завихренного течения уравнение Шредингера перестает быть линейным дифференциальным уравнением. В уравнении (6.14), описывающем статистический ансамбль квантовых частиц, появляются нелинейные члены.

Единый метод описания движения частиц позволяет отказаться от квантовых принципов как не являющихся необходимыми. Однако, он одновременно ставит вопрос: "Какова природа стохастичности в движении частиц?"Ответ может быть только один. Многовариантность (стохастичность) движения частиц обусловлена свойствами геометрии пространства-времени. В двадцатом веке, когда многовариантные геометрии не были известны, такой подход был не возможен, и использование геометрической парадигмы было не возможно. Но сейчас, когда многовариантные геометрии известны, геометрическая парадигма, отрицающая квантовые принципы как первые принципы, выглядит более естественной, чем квантовая парадигма, основанная на избыточных квантовых принципах, потому что изменение геометрии пространства-времени выглядит более разумным, чем изменение принципов динамики.

Были рассмотрены четыре различных метода описания статистического ансамбля. Рассмотрение детерминированных, стохастических и квантовых систем как частных случаев физической системы обусловлено тем обстоятельством, что геометрия пространства-времени не является римановой, и движение частиц может быть изначально многовариантным (стохастическим) [15].

При построении единого формализма не вводилось никаких новых гипотез. Мы работали с физическими принципами (а не с отдельными физическими явлениями). Была осуществлена логическая перезагрузка [16], т.е. замена базовых понятий теории. Отдельная частица как базовое понятие динамики частиц была заменена другим базовым понятием – статистическим ансамблем динамических (или стохастических) частиц. Логическая перезагрузка является логической операцией, редко используемой в теоретической физике.

Обычно статистическое описание используется для описания частиц, когда информация о движении частицы является неполной. Эта неполнота может быть связана с неопределенными начальными условиями или со стохастичностью движения частицы. Обычно статистическое описание вводится как некоторая внешняя операция по отношению к динамике частицы. Логическая перезагрузка позволяет ввести статистическое описание в динамику частиц. Статистическое описание становится внутренней динамической операцией, которая не использует понятие вероятности. Динамическая концепция статистического описания, когда рассматривается много одинаковых независимых частиц, а не вероятность состояния отдельной частицы, расширяет возможности статистического описания, потому что вероятностное описание представляет собой частный случай статистического описания.

Логическая перезагрузка превращает статистическое описание в составную часть динамики частиц. Это обстоятельство расширяет возможности динамики частиц. В частности, в релятивистском случае в рамках единого формализма динамики частиц становится возможным описание рождения (и аннигиляции) пар частица - античастица.

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).

[2] Yu. A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J. Math. Phys.* **31**, 2876-2890, (1990).

[3] Yu. A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. J. Math. Math. Sci.*, **30**, 733-760, (2002).

[4] Yu. A. Rylov, Tubular geometry construction as a reason for new revision of the space-time conception. *e-print /physics/0504031*

[5] J.L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960.

[6] Yu. A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.*, **40,** 256-278, (1999).

[7] D. Bohm, On interpretation of quantum mechanics on the basis of the "hidden"variable conception. *Phys.Rev.* **85,** 166, 180, (1952).

[8] Yu.A. Rylov, Dynamics of stochastic systems and pecularities of measurements in them. *e-print 0210003.*

[9] Yu.A.Rylov, Classical description of pair production. *e-print, physics/0301020* .

[10] A. Clebsch, Über eine allgemaine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **54** , 293-312 (1857).

[11] A. Clebsch, Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **56** , 1-10, (1859).

[12] Yu. A. Rylov, Hydrodynamic equations for incompressible inviscid fluid in terms of generalized stream function . *Int. J. Math. & Mat. Sci.* **2004**, *No. 11, 21, pp. 541-570.*

[13] Lin, C.C. Hydrodynamics of Helium II. *Proc. Int. Sch Phys.* Course XXI, pp. 93-146, New York, Academic, 1963.

[14] Davydov, B. Variational principle and canonical equations for perfect fluid, *Doklady Akadedimii Nauk USSR*, **69**, 165-168, (1949), (in Russian)

[15] Yu. A. Rylov, Necessity of the general relativity revision and free motion of particles in non-Riemannian space-time geometry *e-print 1001.5362v1*

[16] Yu. A.Rylov, Logical reloading in statistical description of particle dynamics. *e-print 1006.1254v1 .*