Тахионный газ как кандидат на темную материю

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{\ }rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site: $http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{\ }rylov/yrylov.htm$

Аннотация

В физической геометрии (т.е. геометрии полностью описываемой ее мировой функцией) тождественные объекты имеют одинаковое описание в терминах мировой функции. В результате пространственноподобный отрезок прямой представляет собой трехмерную поверхность даже в пространственно-временной геометрии Минковского. В дискретной геометрии пространства-времени тахионы имеют два неожиданных свойства: (1) отдельный тахион не может быть обнаружен и (2) тахионный газ может быть обнаружен по его гравитационному воздействию. Хотя молекулы (тахионы) тахионного газа движутся со сверхсветовыми скоростями, средняя скорость движения этих молекул оказывается досветовой. Свойства тахионного газа отличаются от свойств обычного газа. Давление тахионного газа зависит от гравитационного потенциала и не зависит от температуры. В результате тахионный газ может образовывать огромные гало вокруг галактик. Эти гало имеют почти постоянную плотность, и это обстоятельство может объяснить кривые вращения звезд на периферии галактики. Свойства тахионного газа позволяют рассматривать его как темную материю.

Ключевые слова: дискретная геометрия, тахион, темная материя, темная энергия, кривые вращения

1 Введение

При метрическом подходе к геометрии геометрия пространства-времени описывается в терминах мировой функции и только мировой функции. Все геометрические объекты и все геометрические величины выражаются в терминах мировой функции σ. Такое представление геометрических величин мы будем называть σ-имманентным представлением. При метрическом подходе две различные области $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ пространства-времени могут иметь различную геометрию и описываться соответственно мировыми функциями σ_1 и σ_2. Пусть физическое тело имеющее форму $G_1 = g_1(\sigma_1)$ в области $\mathcal{R}_1$ эволюционирует как свободно движущееся тело и оказывается в области

$\mathcal{R}_2$ с другой геометрией. Форма тела описывается теперь как $G_2 = g_2(\sigma_2)$. Как связаны функции g_1 и g_2? Поскольку физическая геометрия является монистической конструкцией, которая полностью описывается единственной величиной (мировой функцией), то имеется только одна возможность

$$g_1(\sigma) = g_2(\sigma) = g(\sigma) \tag{1.1}$$

Традиционная (риманова) геометрия пространства-времени является плюралистической конструкцией. Она описывается несколькими базовыми геометрическими величинами, свойства которых описываются аксиомами. В плюралистической концепции геометрии очень трудно рассматривать проблему отождествления геометрических объектов в разных геометриях. Эта проблема не рассматривается в динамике общей теории относительности (ОТО), которая использует разные геометрии в разных областях пространства-времени. Единственным геометрическим объектом, который рассматривается в ОТО является мировая линия свободной точечной частицы. Предполагается, что мировая линия свободного тела является геодезической.

В рамках римановой геометрии пространства-времени форма геодезической определяется метрическим тензором. Для времениподобных мировых линий это традиционное определение мировой линии свободного тела согласуется с определением (1.1). Однако, оно не согласуется с (1.1) для пространственноподобных мировых линий, потому что в физической геометрии пространственноподобный отрезок прямой не является одномерной линией. Он представляет собой трехмерную поверхность. Это легко проверить, используя определение отрезка прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ между точками P_0 и P_1

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \left\{ R | \sqrt{2\sigma(P_0, R)} + \sqrt{2\sigma(R, P_1)} = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \right\} \tag{1.2}$$

В самом деле, в четырехмерном пространстве-времени одно уравнение (1.2) описывает, вообще говоря, 3-мерную поверхность. Для времениподобных расстояний эта поверхность вырождается в одномерную линию, потому что в этом случае расстояние удовлетворяет аксиоме "анти-треугольника"

$$\sqrt{2\sigma(P_0, P_2)} + \sqrt{2\sigma(P_2, P_1)} \leq \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)}, \quad \sigma(P_i, P_k) > 0, \quad i, k = 0, 1, 2 \tag{1.3}$$

Для пространственноподобных расстояний аксиома (1.3) не выполняется, и множество точек R, удовлетворяющих уравнению (1.2), трехмерно.

Разумеется, точки любого отрезка "прямой" линии

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}t + \mathbf{x}_0, \quad |\mathbf{v}|^2 > c^2$$

удовлетворяют соотношению (1.2), но они представляют собой только малую часть точек R, удовлетворяющих (1.2).

Наше логическое и концептуальное рассмотрение не согласуется с всеобщим мнением, что отрезок прямой является одномерным множеством в любой геометрии. Например, Блюменталь построил дистантную геометрию [1], где он использовал метрический подход к геометрии с расстоянием, которое не удовлетворяет аксиоме треугольника. Блюменталю не удалось построить кривую в рамках метрического подхода. Он был вынужден определить кривую как непрерывное отображение отрезка числовой оси на пространство, где задана геометрия. В соответствии с этим определением кривая линия представляет собой одномерное множество, что не может быть сформулировано в терминах расстояния. Это является пережитком плюралистической концепции геометрии.

Эллипсоид $\mathcal{EL}_{P_0P_1P_3}$ определяется в терминах расстояния

$$\mathcal{EL}_{P_0P_1P_3} = \left\{R|\sqrt{2\sigma\left(P_0, R\right)} + \sqrt{2\sigma\left(P_1, R\right)} = \sqrt{2\sigma\left(P_0, P_3\right)} + \sqrt{2\sigma\left(P_1, P_3\right)}\right\} \qquad (1.4)$$

где точки P_0, P_1 являются фокусами и P_3 есть некоторая точка на поверхности эллипсоида.

Вырожденный эллипсоид, где точка P_3 на его поверхности совпадает с одним из фокусов, является по определению отрезком прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \mathcal{EL}_{P_0P_1P_1}$ между фокусами P_0, P_1. В геометрии, где расстояние удовлетворяет аксиоме треугольника, вырожденный эллипсоид представляет собой одномерное множество. Однако, когда аксиома треугольника не выполняется, вырожденный эллипсоид есть $(n-1)$-мерная поверхность в n-мерном пространстве.

Прямолинейный отрезок определяется в евклидовой геометрии соотношением (1.2). Тот же самый вид его используется в пространственно-временной геометрии Минковского. В собственно евклидовой геометрии гладкая линия определяется как предел ломаной линии, когда длины ее звеньев (прямолинейных отрезков) стремятся к нулю. В физической геометрии кривая определяется тем же способом. Если кривая описывает мировую линию свободной частицы, векторы, описывающие смежные звенья мировой линии, эквивалентны. Эквивалентность векторов означает, что векторы параллельны и имеют равные длины. Для времениподобной мировой линии эти условия приводят к одномерной прямой линии. Для пространственноподобной мировой цепи (тахиона) эти условия приводят к мировой цепи с вихляющими звеньями. Как будет показано, амплитуда этого вихляния бесконечна, и каждое звено представляет собой бесконечную трехмерную поверхность. Отдельный тахион, описываемый такой мировой цепью, не может быть обнаружен. Однако тахионный газ может быть обнаружен по его гравитационному полю.

Здесь рассматриваются тахион и тахионный газ, потому что тахионный газ имеет характерные свойства так называемой темной (скрытой) материи. С одной стороны, не удается обнаружить отдельную частицу темной материи. С другой стороны, темная материя образует огромные гало вокруг галактик с почти постоянной плотностью распределения массы внутри гало. Существование таких гало обнаруживается по их гравитационному воздействию на скорости звезд на периферии галактики. Тахионы имеют похожие свойства. Отдельный тахион не может быть обнаружен по чисто геометрическим соображениям. Тахионный газ имеет массу и создает гравитационное поле. Кроме того, тахионный газ имеет почти постоянную плотность массы в гравитационном поле галактики.

Тахион представляет собой гипотетическую частицу, движущуюся быстрее скорости света. Его масса покоя мнимая. Такие частицы не были обнаружены. Впервые такие частицы рассматривал А.Зоммерфельд [2]. Частицы с отрицательными и мнимыми массами рассматривались Я.П.Терлецким [3]. Тахионы исследовались также другими исследователями [4, 5, 6, 7]. Рассматривались не только тахионы, но также и тахионные поля, являющиеся результатом квантования тахионов.

К сожалению, эффективное описание тахионов возможно только в дискретной геометрии пространства-времени. Рассмотрение тахионов в непрерывной (римановой) геометрии пространства-времени приводит к выводу, что тахионы не существуют, тогда как рассмотрение тахионов в рамках дискретной геометрии пространства-времени приводит к заключению, что отдельный тахион нельзя обнаружить. Невозможность обнаружения отдельного тахиона не означает, что тахионы не существуют. Тахионы могут существовать, но обнаружить отдельный тахион нельзя даже если окажется, что тахион может взаимодействовать с некоторыми элементарными частицами. Например, нейтрон самопроизвольно распадается на протон, электрон и нейтрино. Однако нельзя быть уверенным, что этот распад не является результатом столкновения нейтрона с тахионом, потому что тахионный газ может заполнять всю вселенную с почти постоянной плотностью. В этом отношении свойства тахионного газа близки к свойствам вакуума.

Такие необычные свойства тахионов обусловлены тем, что в дискретной геометрии пространства-времени гладкие мировые линии заменяются мировыми цепями. Звенья тахионных мировых цепей представляют собой пространственноподобные отрезки. Две смежных точки тахионной мировой цепи могут разделяться очень большим пространственным расстоянием. Обнаружив одну из точек этой мировой цепи, нельзя обнаружить другую точку мировой цепи.

Ключевой точкой нашего исследования является использование дискретной геометрии пространства-времени, чьи свойства сильно отличаются от свойств римановой геометрии и других непрерывных геометрий. Математический аппарат дифференциальной геометрии не годится для дискретной геометрии. Линейное векторное пространство, которое является основой дифференциальной геометрии, не может быть введено в дискретной геометрии. Вводя формализм линейного векторного пространства в дискретную геометрию, мы получаем неоднозначность таких операций как сложение векторов и разложение вектора на составляющие. Единственной величиной общей для непрерывной и дискретной геометрии является расстояние d или мировая функция $\sigma = \frac{1}{2}d^2$.

В дискретной геометрии, так же как в любой физической геометрии, нельзя, вообще говоря, ввести линейное векторное пространство. Математический формализм дискретной геометрии существенно отличается от формализма дифференциальной геометрии. Этот формализм получается из формализма собственно евклидовой геометрии, представленного в терминах мировой функции. Его можно найти в работе [8]. Динамика частиц в дискретной геометрии пространства-времени описана в [9]. Формализм физической геометрии, основанный на мировой функции несколько необычен. Он использует бескоординатное описание и не использует понятие линейного векторного пространства. Отсутствие линейного векторного пространства в дискретной (физической) геометрии представляется необычным для математиков (и физиков). Типичный вопрос математиков звучит так: "Почему скалярное произведение определяется в виде (2.4)? Скалярное произведение есть операция линейного векторного пространства. Название "скалярное произведение" уже использовано. Используйте другое название для операции (2.4), например, σ-скалярное произведение." На самом деле определение (2.4) является более общим определением, потому что оно не использует понятие линейного векторного пространства и совпадает с традиционным определением через линейное векторное пространство в случае, когда оно может быть введено. В соответствии с правилами логики название "скалярное произведение" должно иметь более общее определение, т.е. (2.4), тогда как традиционное определение через линейное векторное пространство должно называться "линейное скалярное произведение" или скалярное произведение с каким-нибудь дополнительным эпитетом, потому что это более специальное определение, использующее понятие линейного векторного пространства. Тот факт, что традиционное определение было введено тогда, когда мы ничего не знали о дискретной геометрии, не имеет значения.

При рассмотрении дискретной геометрии можно не использовать квантовые принципы, потому что для обычных частиц с положительной массой покоя (тардионов) квантовые принципы являются следствием дискретности геометрии пространства-времени. Рассмотрение квантовых принципов в дискретной геометрии пространства-времени напоминает описание броуновского движения в терминах теплорода (в терминах аксиоматической термодинамики). Если элементарная длина λ_0 дискретной геометрии пространства-времени связана с квантовой постоянной $\hbar$ с помощью соотношения $\lambda_0^2 = \hbar/bc$ (постоянные $\hbar$, b, c являются универсальными постоянными), то квантовые эффекты для тардионов могут быть объяснены как геометрические эффекты дискретной геометрии пространства-времени [10]. В подобной ситуации бессмысленно квантовать тахионы и рассматривать возникшие в результате квантования тахионные поля. Следует рассматривать тахионы как классические частицы в дискретной геометрии пространства-времени.

Математический аппарат дифференциальной (непрерывной) геометрии не может быть применен к дискретной геометрии. В дискретной геометрии нет непрерывных мировых линий, нет дифференциальных уравнений и дифференциальных соотношений. Нельзя использовать фазовое пространство координат и импульсов для описания состояния частицы, потому что импульс есть результат дифференцирования вдоль непрерывной мировой линии. А использовать дифференцирование в дискретной геометрии нельзя. В дискретной геометрии пространства-времени состояние частицы описывается двумя точками P_s, P_{s+1}. Вектор $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$ описывает геометрический импульс частицы, и его геометрическая масса $\mu = |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}|$ определяет обычную массу частицы m с помощью соотношения

$$m = b\mu \tag{1.5}$$

где b есть универсальная постоянная. Динамика частицы в дискретной геометрии пространства-времени описывается каркасной концепцией [9], где вместо непрерывной мировой линии используется мировая цепь $\mathcal{C}$ (ломаная линия), звеньями которой являются векторы $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$ одной и той же длины μ

$$\mathcal{C} = \bigcup_s \mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}, \quad |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}| = \mu = \text{const}, \quad s = ...0, 1, 2, ... \tag{1.6}$$

Для свободной частицы смежные векторы $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$ и $\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}$ эквивалентны ($\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}\text{eqv}\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}$). Это означает, что

$$(\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}.\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}) = |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}| \cdot |\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}| \wedge (|\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}| = |\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}|) \tag{1.7}$$

Соотношения (1.5) - (1.7) являются специальными предположениями. Они являются следствиями динамической концепции в дискретной геометрии пространства-времени [9]. В соответствии с отношением эквивалентности (1.7) в дискретной геометрии пространства-времени фиксированный вектор $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$ определяет смежный вектор $\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}$ неоднозначно. В результате мировая цепь вихляет. Амплитуда этого вихляния порядка элементарной длины λ_0 для тардионов ($\mu^2 > 0$). Это вихляние является причиной квантовых эффектов. Для тахионов амплитуда вихляния бесконечна.

Для тахионов пространственное расстояние между смежными точками P_s и P_{s+1} случайно, и оно может быть бесконечно большим. Другими словами, отдельный тахион не может быть обнаружен в эксперименте, потому что его нельзя обнаружить, а не потому что тахионы не существуют.

Однако, если нельзя обнаружить отдельный тахион, то это не означает, что нельзя обнаружить гравитационное воздействие тахионного газа, состоящего из многих ненаблюдаемых тахионов. Ненаблюдаемые тахионы образуют так называемую темную материю, которая образует большие сферические гало вокруг некоторых галактик. Существование таких гало необходимо для объяснения скоростей вращения звезд (кривые вращения) в некоторых галактиках [11]. В этих галактиках скорости вращения звезд практически не зависят от расстояния r до ядра галактики. Иногда скорости звезд возрастают с увеличением расстояния r до ядра галактики. Если гравитирующая масса концентрируется в ядре галактики, то гравитационная сила Ньютона пропорциональна r^{-2}, и вращательная скорость пропорциональна $r^{-1/2}$. Внутри гравитирующей сферы с однородным распределением массы гравитационая сила Ньютона пропорциональна r, и скорость вращения пропорциональна r.

В данной работе мы попытаемся рассчитать параметры тахионного газа для того, чтобы определить может ли тахионный газ заполнять гало с необходимой плотностью.

2 Дискретная геометрия пространства-времени

Дискретная геометрия получается как обобщение собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, которая строится обычно как логическое построение. Традиционно используется метод Евклида, когда все утверждения геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ выводятся из системы аксиом, описывающих свойства простейших геометрических объектов геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Метод Евклида не пригоден для построения дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Неадекватность метода Евклида связана с тем, что мы не знаем как выглядят простейшие геометрические объекты геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ в других геометриях. Например, отрезок прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ между точками P_0 и P_1 является одномерной линией в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, тогда как $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ является поверхностью в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Есть только одна величина, которая является общей для $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Это расстояние $d\left(P_0, P_1\right)$ между двумя точками P_0 и P_1 точечного множества Ω, где задана геометрия. Более эффективно использовать мировую функцию $\sigma = \frac{1}{2}d^2$ вместо расстояния d, потому что мировая функция σ всегда вещественна (даже в геометрии Минковского, где расстояние d может быть мнимым).

Мировая функция σ есть вещественная однозначная функция. Она определяется соотношением

$$\sigma: \quad \Omega\times\Omega\rightarrow\mathbb{R},\quad \sigma(P,Q)=\sigma(Q,P),\quad \sigma(P,P)=0,\quad \forall P,Q\in\Omega \tag{2.1}$$

Для обобщения $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ на $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, нужно описать геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ в терминах евклидовой мировой функции σ_{E}. После этого, заменяя σ_{E} мировой функцией σ_{d} геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ во всех утверждениях геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, получаем все утверждения геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Мировая функция σ_{d} геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ может быть взята в виде

$$\sigma_{\mathrm{d}}(P,Q)=\sigma_{\mathrm{M}}(P,Q)+\frac{\lambda_0^2}{2}\mathrm{sgn}\left(\sigma_{\mathrm{M}}(P,Q)\right),\quad \forall P,Q\in\Omega \tag{2.2}$$

где σ_{M} есть мировая функция псевдоримановой геометрии, мало отличающейся от геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, и λ_0 есть элементарная длина. В силу соотношения (2.2) все расстояния в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ удовлетворяют соотношению

$$\left|\rho_{\mathrm{d}}(P,Q)\right|=\left|\sqrt{2\sigma_{\mathrm{d}}(P,Q)}\right|\notin(0,\lambda_0),\quad \forall P,Q\in\Omega \tag{2.3}$$

которое является определением дискретной геометрии.

Будучи представленной в терминах мировой функции σ_{E}, собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ содержит два вида соотношений: (1) общегеометрические соотношения, которые содержат только мировую функцию σ_{E}, и (2) специальные соотношения геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, которые содержат ограничения, налагаемые на мировую функцию σ_{E}. Подход, когда геометрия описывается в терминах и только в терминах мировой функции, будем называть метрическим подходом к геометрии. Любую геометрию, описываемую мировой функцией полностью, будем называть физической геометрий.

Приведем некоторые общегеометрические определения, которые важны в динамике частиц [8]:

Вектор $\mathbf{PQ}$ есть упорядоченное множество $\{P,Q\}$ из двух точек P,Q (а не элемент линейного векторного пространства как обычно). Скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)=\sigma(P_0,Q_1)+\sigma(P_1,Q_0)-\sigma(P_0,Q_0)-\sigma(P_1,Q_1) \tag{2.4}$$

Длина $|\mathbf{PQ}|$ вектора $\mathbf{PQ}$ определяется соотношением

$$|\mathbf{PQ}|^2=(\mathbf{PQ}.\mathbf{PQ})=2\sigma(P,Q) \tag{2.5}$$

n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2,...\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ линейно зависимы, если и только если определитель Грама

$$F_n(\mathcal{P}_n)=\det||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)||,\quad i,k=1,2,...n,\quad \mathcal{P}_n\equiv\{P_0,P_2,...P_n\} \tag{2.6}$$

обращается в нуль

$$F_n(\mathcal{P}_n)=0 \tag{2.7}$$

Два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ эквивалентны (равны) ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$), если векторы параллельны

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\upuparrows\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1):\quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)=|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|\cdot|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{2.8}$$

и их длины равны

$$\sigma\left(P_0,P_1\right)=\sigma\left(Q_0,Q_1\right) \tag{2.9}$$

В соответствии с (2.8), (2.9) определение эквивалентности имеет вид (1.7)

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1: \quad \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right)=\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|^2\wedge\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|^2=\left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right|^2 \tag{2.10}$$

Все общегеометрические соотношения (2.4) - (2.10) получаются как свойства линейного векторного пространства. Однако, они не содержат ссылок на линейное векторное пространство. Они написаны в терминах мировой функции σ_{E} собственно евклидового пространства, и они могут быть использованы в любой физической геометрии даже в том случае, когда в этой геометрии нельзя ввести линейное векторное пространство. Чтобы использовать соотношения (2.4) - (2.10) в дискретной геометрии достаточно использовать в них мировую функцию σ_{d} дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$.

С формальной точки зрения общегеометрические соотношения (2.4) - (2.10) осуществляют некоторую переработку информации, содержащейся в мировой функции. Такая переработка должна быть универсальной, т.е. одинаковой во вех обобщенных геометриях. Такой метод переработки известен для собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Он может быть использован для построения других обобщенных геометрий. В случае, когда можно ввести линейное векторное пространство, такая переработка позволяет построить динамику частиц в пространственно-временной геометрии, оснащенной линейным векторным пространством. Поскольку общегеометрические соотношения (2.4) - (2.10) универсальны в том смысле, что они не ссылаются на линейное векторное пространство, они могут быть использованы для построения динамики частиц в тех геометриях пространства-времени, где введение линейного векторного пространства невозможно.

Такое построение геометрии очень эффективно, поскольку оно не требует доказательства многочисленных теорем и проверки совместимости аксиом. Кроме того геометрия может быть построена в бескоординатной форме. Монистический характер геометрии (описание в терминах единственной базовой величины - мировой функции) автоматически обеспечивает правильную связь между всеми вторичными величинами во всех физических геометриях. Установление связи между различными геометрическими величинами является главной проблемой при попытке плюралистического построения геометрии, основанного на использовании нескольких независимых базовых величин.

Специальные соотношения собственно евклидовой геометрии имеют вид [8]:

I. Определение метрической размерности:

$$\exists\mathcal{P}_n\equiv\left\{P_0,P_1,...P_n\right\}\subset\Omega, \qquad F_n\left(\mathcal{P}_n\right)\neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right)=0, \qquad k>n \tag{2.11}$$

где $F_n\left(\mathcal{P}_n\right)$ есть определитель Грама n-ого порядка (2.6). Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i,\ i=1,2,...n$ являются базовыми векторами прямолинейной координатной системы K_n с началом координат в точке P_0. Ковариантные координаты точки P в системе координат K_n определяются соотношением

$$x_i\left(P\right)=\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}\right), \qquad i=1,2,...n \tag{2.12}$$

Метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}_n)$ и $g^{ik}(\mathcal{P}_n)$, $i,k=1,2,...n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}_n)\, g_{lk}(\mathcal{P}_n)=\delta_l^i, \qquad g_{il}(\mathcal{P}_n)=(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l)\,, \qquad i,l=1,2,...n \tag{2.13}$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma_{\mathrm{E}}(P,Q)=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}_n)\,(x_i(P)-x_i(Q))\,(x_k(P)-x_k(Q))\,, \qquad \forall P,Q\in\Omega \tag{2.14}$$

где координаты $x_i(P)\,,\ x_i(Q)\,,\ i=1,2,...n$ точек P и Q суть ковариантные координаты векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ соответственно в системе координат K.

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения g_k

$$g_k>0, \qquad k=1,2,...,n \tag{2.15}$$

IV. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P})=y_i\in\mathbb{R}, \qquad i=1,2,...n \tag{2.16}$$

рассматриваемая как система уравнений для определения точки P как функции координат $y=\{y_i\}$, $i=1,2,...n$ всегда имеет одно и только одно решение. Условия I – IV содержат ссылку на размерность n евклидова пространства, которая определяется соотношениями (2.11).

Специальные соотношения собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ могут быть не верны для других физических геометрий. Все соотношения I – IV записаны в терминах мировой функции. Они являются ограничениями на вид мировой функции собственно евклидовой геометрии.

Собственно евклидова геометрия в σ-представлении выглядит совсем по-другому, чем в традиционном представлении на основе линейного векторного пространства. Например, такая величина как размерность геометрии имеет два различных значения в σ-представлении. С одной стороны, метрическая размерность n_{m} представляет собой максимальное число линейно независимых векторов, определяемое соотношениями (2.11). С другой стороны, координатная размерность n_{c} есть число координат, используемое для описания точечного множества Ω. В собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ координатная размерность совпадает с метрической размерностью ($n_{\mathrm{c}}=n_{\mathrm{m}}$), и это обстоятельство является следствием специальных (не общегеометрических) соотношений (2.11), (2.12)

Вообще, координатная маркировка точек множества Ω не имеет отношения к геометрии. В собственно евклидовой геометрии эти две размерности совпадают, потому что координатная размерность n_{c} определяется специальными условиями (2.11), (2.12), которые характерны для собственно евклидовой геометрии. В геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ максимальное число n_{m} линейно независимых векторов больше, чем число координат n_{c}. Например, для шести точек $\mathcal{P}_5=\{P_0,P_1...P_5\}$

$$\begin{aligned} P_0 &= \{0,0,0,0\}\,, \quad P_1=\{0,l,0,0\}\,, \quad P_2=\{0,0,l,0\}\,, \\ P_3 &= \{0,0,l,0\}\,, \quad P_4=\{0,0,0,l\}\,, \quad P_5=\{a,0,0,0\} \end{aligned}$$

определитель Грама $F_5(\mathcal{P}_5)$ обращается в нуль в геометрии Минковского $\mathcal{G}_\mathrm{M}$ с мировой функцией

$$\sigma_\mathrm{M}(x,x') = \frac{1}{2}\left(x^0 - x'^0\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)^2 \tag{2.17}$$

Однако определитель Грама $F_5(\mathcal{P}_5)$, подсчитанный в дискретной геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{d}$ с мировой функцией σ_d, заданной соотношением (2.2), не обращается в нуль.

$$F_5(\mathcal{P}_5) = d\left(-a^2l^6 + 3al^7 - l^8\right) + O\left(d^2\right) \tag{2.18}$$

Здесь $d = \lambda_0^2/2 \ll a^2, l^2$. Для пяти точек $\mathcal{P}_4 = \{P_0, P_1 ... P_4\}$ получаем в $\mathcal{G}_\mathrm{d}$

$$F_4(\mathcal{P}_4) = -l^8 - 4l^6d + O\left(d^2\right) \tag{2.19}$$

Таким образом, вообще говоря, метрическая размерность $n_\mathrm{m} \geq 5$ в $\mathcal{G}_\mathrm{d}$. В $\mathcal{G}_\mathrm{d}$ метрическая размерность $n_\mathrm{m} \geq 5$ не может совпадать с координатной размерностью $n_\mathrm{c} = 4$. По существу, это означает, что нельзя ввести конечное число линейно независимых базисных векторов и разложить пространственно-временные векторы по базисным векторам. Это очень неожиданно, потому что традиционное построение дифференциальной геометрии (например, римановой) начинается с задания n-мерного многообразия с системой координат на нем. Разумеется, при этом предполагается, что максимальное число линейно независимых векторов в каждой точке равно $n = n_\mathrm{m} = n_\mathrm{c}$. Только в этом случае можно разложить вектор по базисным векторам и использовать операции, определенные в линейном векторном пространстве. В случае дискретной геометрии пространства-времени, где $n_\mathrm{m} \neq n_\mathrm{c}$, нельзя ввести линейное векторное пространство, хотя система координат может быть введена, и координатная размерность $n_\mathrm{c} = 4$, потому что дискретная геометрия определяется на том же точечном множестве, на котором определяется геометрия Минковского.

Заметим, что условия (2.11), определяющие метрическую размерность n_m содержат массу ограничений, и все они являются специальными условиями геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{E}$. Это означает, что имеется масса физических геометрий, где $n_\mathrm{m} \neq n_\mathrm{c}$, и где нельзя ввести линейное векторное пространство. В пределе $d \to 0$, $F_5(\mathcal{P}^5) = 0$ в (2.18), и $\mathcal{G}_\mathrm{d}$ преобразуется в $\mathcal{G}_\mathrm{M}$. В этом случае метрическая размерность $n_\mathrm{m} = 4$ совпадает с координатной размерностью $n_\mathrm{c} = 4$. Это означает, что приближенно можно использовать пространственно-временную геометрию $\mathcal{G}_\mathrm{M}$ в случае, когда типичная длина l векторов много больше, чем элементарная длина λ_0. В этом случае можно положить приближенно $\lambda_0 = 0$, и предположить, что $n_\mathrm{m} = n_\mathrm{c}$.

Множество значений определителей Грама $F_n(\mathcal{P}_n)$, $n = 2, 3, ...$ может быть таким, что будет нельзя ввести метрическую размерность n_m. По-видимому, дискретные геометрии пространства-времени являются геометриями без определенной метрической размерности. Такие "безразмерные" геометрии выглядят особенно экзотично. Современные исследователи имеют дело только с евклидовым методом, который использует только геометрии пространства-времени с определенной размерностью. С другой стороны классическая динамика частиц не работает в микромире, описываемом геометрией Минковского. Поскольку дискретные ("безразмерные") геометрии не известны большинству исследователей, то они используют квантовую динамику, которая имитирует свойства дискретной геометрии. Эта имитация произвольна и бессистемна. Кроме того эта имитация не полна. Имеются свойства динамики реальных частиц, которые не могут имитироваться квантовой динамикой в пространстве-времени с геометрией Минковского.

Мы видим, что совпадение метрической размерности n_{m} с координатной размерностью n_{c} и построение гладкого многообразия с размерностью $n = n_{\mathrm{m}} = n_{\mathrm{c}}$ является специальным свойством собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, которое не является общегеометрическим свойством. Традиционный евклидов метод построения дифференциальной геометрии начинается с определения гладкого многообразия с фиксированной размерностью. Такой метод не является общим методом построения обобщенных геометрий, потому что он использует специальные свойства геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, которые, вообще говоря, не характерны для всех обобщенных геометрий. Вообще, использование координатного описания для построения обобщенных геометрий является специальным свойством собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, используемым для такого построения. Такой подход не может быть общим методом построения обобщенных геометрий. Используя специальные свойства геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, можно получить только часть возможных обобщенных геометрий. В частности, использование координатного описания не позволяет построить геометрии с неопределенной метрической размерностью и с интранзитивным отношением эквивалентности. Однако, координатная маркировка точек множества Ω не имеет ничего общего с построением многообразия. Координатная маркировка точек может быть всегда использована, и она не имеет ничего общего с построением обобщенных геометрий. Координатная маркировка начинает иметь отношение к построению обобщенных геометрий, когда накладывается условие $n_{\mathrm{c}} = n_{\mathrm{m}}$.

Соотношение $n_{\mathrm{c}} = n_{\mathrm{m}}$ является специальным свойством собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, и оно может быть ошибочным для многих физических геометрий. Используя соотношение $n_{\mathrm{c}} = n_{\mathrm{m}}$ при построении обобщенной геометрии, можно очутиться в ситуации, когда реальные геометрии пространства-времени окажутся вне области рассмотрения.

3 Динамика частицы с двухточечным каркасом

В дискретной геометрии пространства-времени состояние частицы (физического тела) описывается ее каркасом $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$, состоящим из $n+1$ жестко связанных пространственно-временных точек [9]. Это является следствием математического формализма, основанного на использовании мировой функции. Фазовое пространство координат и импульсов нельзя использовать, потому что операция дифференцирования, необходимая для определения импульса, не может быть определена в дискретной геометрии. Каркас может рассматриваться как дискретный аналог репера, жестко связанного с физическим телом (частицей). Следя за движением каркаса, мы следим за движением частицы. Состояние точечной частицы описывается двухточечным каркасом $\mathcal{P}_1 = \{P_0, P_1\}$. Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ описывает энергию - импульс частицы, и $\mu = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ есть геометрическая масса частицы, связанная с обычной массой с помощью соотношения (1.5). Информация о положении двух точек каркаса существенна для описания состояния точечной частицы. Динамика каркаса $\mathcal{P}_1$ точечной частицы описывается мировой цепью (1.6), (1.7). В соответствии с этим соотношением и определением скалярного произведения (2.4) динамические уравнения для точечной частицы записываются в виде

$$\sigma\left(P_{s-1}, P_s\right) = \sigma\left(P_s, P_{s+1}\right), \quad s = ...0, 1, 2... \tag{3.1}$$

$$\sigma\left(P_{s-1}, P_{s+1}\right) = 4\sigma\left(P_{s-1}, P_s\right), \quad s = ...0, 1, 2... \tag{3.2}$$

Решая динамические уравнения (3.1), (3.2), можно определить множество точек мировой цепи.

В инерциальной системе координат геометрии Минковского, при $s = 1$ смежные точки P_0, P_1, P_2 имеют координаты

$$P_0 = \{x_0, \mathbf{x}\}, \quad P_1 = \{x_0 + p_0, \mathbf{x} + \mathbf{p}\}, \quad P_2 = \{x_0 + 2p_0 + \alpha_0, \mathbf{x}+2\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}\} \tag{3.3}$$

В геометрии Минковского 4-вектор $\alpha = \{\alpha_0, \boldsymbol{\alpha}\}$ может рассматриваться как дискретный аналог вектора ускорения.

Выберем мировую функцию σ_{M} в виде, который она имеет в расширенной общей теории относительности [12, 13] со слабым гравитационным полем, описываемым гравитационным потенциалом $V(x)$

$$\sigma_{\mathrm{M}}\left(x, x'\right) = \frac{1}{2}\left(\left(c^2 - 2V\left(\mathbf{y}\right)\right)\left(x_0 - x_0'\right)^2 - \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right)^2\right), \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}'}{2} \tag{3.4}$$

где $V = V(\mathbf{y})$ есть гравитационный потенциал в точке $\mathbf{y}$, а мировая функция σ_{d} имеет вид (2.2). Получаем в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$

$$\left(c^2 - 2V\right)\left(p_0 + \alpha_0\right)^2 - \left(\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\lambda_0^2 = \left(c^2 - 2V\right)p_0^2 - \mathbf{p}^2 + \varepsilon\lambda_0^2 = \mu^2, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}\left(\mu^2\right) \tag{3.5}$$

$$\left(c^2 - 2V\right)\left(2p_0 + \alpha_0\right)^2 - \left(2\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\lambda_0^2 = 4\left(\left(c^2 - 2V\right)p_0^2 - \mathbf{p}^2 + \varepsilon\lambda_0^2\right), \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}\left(\mu^2\right) \tag{3.6}$$

Здесь величины $x = \{x_0, \mathbf{x}\}$, $p = \{p_0, \mathbf{p}\}$ предполагаются заданными, а 4-вектор $\alpha = \{\alpha_0, \boldsymbol{\alpha}\}$ должен быть определен из динамических уравнений (3.5), (3.6). Из (3.5) следует, что

$$p_0 = \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + \varepsilon\left|\mu\right|^2 - \varepsilon\lambda_0^2}}{\sqrt{c^2 - 2V}} \tag{3.7}$$

Динамические уравнения имеют один и тот же вид для времениподобных ($\mu^2 > 0$, $\varepsilon > 0$) и пространственноподобных ($\mu^2 < 0$, $\varepsilon < 0$) мировых цепей. Мы имеем два уравнения для четырех составляющих 4-вектора α. В результате решение, вообще говоря, не единственно. Рассмотрим отдельно два случая: (1) $p_0 \neq 0$ и (2) $p_0 = 0$

Все величины в дискретной геометрии будут называться именами, которыми они называются в непрерывной (римановой) геометрии при $\lambda_0 = 0$.

3.1 Случай $p_0 \neq 0$

После преобразования уравнений (3.5), (3.6) получаем два соотношения

$$\alpha_0 = \frac{2\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + 3\varepsilon\lambda_0^2}{2p_0\left(c^2 - 2V\right)} \tag{3.8}$$

$$\frac{\left(v^{2}-\left(c^{2}-2V\right)\right)}{\left(c^{2}-2V\right)}\left(\alpha_{\|}+\frac{\frac{3}{2}\varepsilon\lambda_{0}^{2}p}{\left(p^{2}-p_{0}^{2}\left(c^{2}-2V\right)\right)}\right)^{2}-\boldsymbol{\alpha}_{\perp}^{2}=r^{2},\quad v=\frac{p}{p_{0}} \tag{3.9}$$

где величина r определяется соотношением

$$r^{2}=-3\varepsilon\lambda_{0}^{2}-\frac{9}{4}\frac{\lambda_{0}^{4}}{p_{0}^{2}\left(v^{2}-\left(c^{2}-2V\right)\right)},\quad v=\frac{p}{p_{0}} \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\|}=\mathbf{p}\frac{(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p})}{\mathbf{p}^{2}},\quad \boldsymbol{\alpha}_{\perp}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_{\|},\quad \alpha_{\|}^{2}=\frac{(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p})^{2}}{\mathbf{p}^{2}},\quad \alpha_{\|}=\frac{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}}{p},\quad \mathbf{p}^{2}=p^{2} \tag{3.11}$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}_{\|}$ есть составляющая 3-вектора $\boldsymbol{\alpha}$, которая параллельна вектору $\mathbf{p}$, тогда как $\boldsymbol{\alpha}_{\perp}$ является составляющей 3-вектора $\boldsymbol{\alpha}$, которая перпендикулярна вектору $\mathbf{p}$.

Вектор $\mathbf{v}=\mathbf{p}/p_{0}$ можно интерпретировать как 3-скорость частицы, описываемой мировой цепью (1.6), (1.7). В случае непрерывной (римановой) геометрии ($\lambda_{0}\rightarrow 0$) $\mathbf{v}$ есть обычный 3-вектор скорости.

В случае времениподобного вектора $\mathbf{P}_{0}\mathbf{P}_{1}$ (тардион) $\varepsilon=1$, $v^{2}<c^{2}$, и в соответствии с (3.7) $\mu=|\mu|$, если $\lambda_{0}\ll\mu$, $V\ll c^{2}$ и $p\ll cp_{0}$ (нерелятивистский случай). В этом случае уравнения (3.9), (3.10) имеют вид

$$\left(\alpha_{\|}-\frac{3\lambda_{0}^{2}}{2\mu}v\right)^{2}+\boldsymbol{\alpha}_{\perp}^{2}=r_{1}^{2},\quad r_{1}^{2}=-r^{2}\simeq 3\lambda_{0}^{2}+\mathcal{O}\left(\lambda_{0}^{2}\right) \tag{3.12}$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$\alpha_{\|}=\frac{3\lambda_{0}^{2}}{2\mu}v+\sqrt{3}\lambda_{0}\cos\theta,\quad \alpha_{\perp 1}=\sqrt{3}\lambda_{0}\sin\theta\cos\phi,\quad \alpha_{\perp 2}=\sqrt{3}\lambda_{0}\sin\theta\sin\phi \tag{3.13}$$

$$\alpha_{0}=\frac{3\lambda_{0}^{2}}{2\mu}v^{2}+\sqrt{3}\lambda_{0}v\cos\theta+\frac{3}{2}\frac{\lambda_{0}^{2}}{\mu}, \tag{3.14}$$

Здесь θ,ϕ суть произвольные вещественные числа. Это означает, что разница между смежными векторами $\mathbf{P}_{0}\mathbf{P}_{1}$ и $\mathbf{P}_{1}\mathbf{P}_{2}$, описываемая 4-вектором α, определена неоднозначно. Мировая цепь частицы вихляет с амплитудой порядка λ_{0}. Статистическое описание этого вихляния приводит к уравнению Шредингера [10], если только $\lambda_{0}^{2}=\hbar/\left(bc\right)$.

В случае тахиона, когда вектор $\mathbf{P}_{0}\mathbf{P}_{1}$ пространственноподобный, $\varepsilon=-1$ и $v^{2}>c^{2}$. Тогда уравнения (3.9), (3.10) принимают вид

$$\frac{\left(v^{2}-\left(c^{2}-2V\right)\right)}{\left(c^{2}-2V\right)}\left(\alpha_{\|}-\frac{\frac{3}{2}\lambda_{0}^{2}v}{p_{0}\left(v^{2}-\left(c^{2}-2V\right)\right)}\right)^{2}-\boldsymbol{\alpha}_{\perp}^{2}=r^{2},\quad v=\frac{p}{p_{0}} \tag{3.15}$$

$$r^{2}=3\lambda_{0}^{2}-\frac{9}{4}\frac{\lambda_{0}^{4}}{p_{0}^{2}\left(v^{2}-\left(c^{2}-2V\right)\right)} \tag{3.16}$$

Если λ_{0} достаточно мало ($\lambda_{0}^{2}<p_{0}^{2}c^{2}$), то $r^{2}>0$. Решение уравнения (3.15) также неединственно

$$\alpha_{\|}=\frac{3\lambda_{0}^{2}}{2p_{0}\left(v^{2}-\left(c^{2}-2V\right)\right)}v+\frac{r\sqrt{c^{2}-2V}}{\sqrt{v^{2}-\left(c^{2}-2V\right)}}\cosh\theta \tag{3.17}$$

$$\alpha_{\perp 1} = r\sinh\theta\cos\phi, \quad \alpha_{\perp 2} = r\sinh\theta\sin\phi \quad v = \frac{p}{p_0} = \frac{p\sqrt{(c^2-2V)}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 - |\mu|^2 + \lambda_0^2}} \tag{3.18}$$

$$\alpha_0 = \frac{2\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - 3\lambda_0^2}{2p_0\left(c^2-2V\right)} = \frac{p\left(\frac{3\lambda_0^2}{2p_0(v^2-(c^2-2V))}v + \frac{r\sqrt{c^2-2V}}{\sqrt{v^2-(c^2-2V)}}\cosh\theta\right) - \frac{3}{2}\lambda_0^2}{p_0\left(c^2-2V\right)} \tag{3.19}$$

Здесь θ, ϕ суть произвольные вещественные числа. Но теперь амплитуда вихляния бесконечна из-за функций cosh и sinh. Амплитуда вихляния бесконечна даже в случае пространственно-временной геометрии Минковского, когда $\lambda_0 = 0$. Составляющие скорости $\mathbf{u}$ тахиона определяются соотношениями

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}}{p_0 + \alpha_0} \tag{3.20}$$

Получаем следующие выражения

$$\begin{aligned} u_{\parallel} &= \frac{p+\alpha_{\parallel}}{p_0+\alpha_0} = \frac{\left(p + \frac{3\lambda_0^2}{2p_0(v^2-(c^2-2V))}v + \frac{r\sqrt{c^2-2V}}{\sqrt{v^2-(c^2-2V)}}\cosh\theta\right)}{p_0 + \frac{p\left(\frac{3\lambda_0^2}{2p_0(v^2-(c^2-2V))}v + \frac{r\sqrt{c^2-2V}}{\sqrt{v^2-(c^2-2V)}}\cosh\theta\right) - \frac{3}{2}\lambda_0^2}{p_0(c^2-2V)}} \\ &= \frac{p_0\left(c^2-2V\right)}{p} + \mathcal{O}\left(\cosh^{-1}\theta\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} u_{\perp 1} &= \frac{\alpha_{\perp 1}}{p_0+\alpha_0} = \frac{r\sinh\theta\cos\phi}{p_0 + \frac{p\left(\frac{3\lambda_0^2}{2p_0(v^2-(c^2-2V))}v + \frac{r\sqrt{c^2-2V}}{\sqrt{v^2-(c^2-2V)}}\cosh\theta\right) - \frac{3}{2}\lambda_0^2}{p_0(c^2-2V)}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{(c^2-2V)}{v^2}}\sqrt{(c^2-2V)}\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}\cos\phi + \mathcal{O}\left(\cosh^{-1}\theta\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

При усреднении составляющих $\mathbf{u}$ предполагается, что все направления (решения) равновероятны. Величины p_0, p предполагаются фиксированными при усреднении. Тогда используется формула

$$\langle\mathbf{u}\rangle = \lim_{\Theta\to\infty} \frac{1}{N}\int_{-\Theta}^{\Theta}\cosh\theta d\theta \int_0^{2\pi}\mathbf{u}d\phi, \quad N = 4\pi\sinh\Theta \tag{3.23}$$

где символ $\langle ... \rangle$ означает усреднение. В результате усреднения получаем

$$\langle u_{\perp 1}\rangle = \langle u_{\perp 2}\rangle = 0 \tag{3.24}$$

$$\left\langle u_{\parallel}\right\rangle = \frac{p_0\left(c^2-2V\right)}{p} + \mathcal{O}\left(\cosh^{-1}\Theta\right) = \frac{\left(c^2-2V\right)}{v} < c \tag{3.25}$$

$$\left\langle u_{\parallel}^2\right\rangle = \left\langle u_{\parallel}\right\rangle^2 = \langle u\rangle^2 = \frac{\left(c^2-2V\right)^2}{v^2} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\left\langle u_{\perp}^{2}\right\rangle &= 2\pi\frac{p_{0}^{2}\left(c^{2}-2V\right)\left(v^{2}-c^{2}+2V\right)}{p^{2}4\pi\sinh\Theta}\int_{-\Theta}^{\Theta}\frac{\sinh^{2}\theta}{\sinh^{2}\theta-1}\cosh\theta d\theta+\mathcal{O}\left(\cosh^{-1}\Theta\right) \\ &= \frac{p_{0}^{2}}{p^{2}}\left(c^{2}-2V\right)\left(v^{2}-c^{2}+2V\right)+\mathcal{O}\left(\cosh^{-1}\Theta\right) \qquad (3.27)\end{aligned}$$

В пределе $\Theta\rightarrow\infty$

$$\left\langle u_{\perp}^{2}\right\rangle=\frac{\left(c^{2}-2V\right)\left(v^{2}-c^{2}+2V\right)}{v^{2}}<c^{2} \qquad (3.28)$$

В соответствии с (3.24), (3.26)

$$\left\langle \mathbf{u}^{2}\right\rangle-\left\langle \mathbf{u}\right\rangle^{2}=\left\langle \mathbf{u}_{\perp}^{2}\right\rangle=\left(c^{2}-2V\right)\left(1-\frac{c^{2}-2V}{v^{2}}\right)<c^{2} \qquad (3.29)$$

Если $p_{0}\rightarrow0$, то $v\rightarrow\infty$ и

$$\left\langle \mathbf{u}^{2}\right\rangle-\left\langle \mathbf{u}\right\rangle^{2}=\left(c^{2}-2V\right) \qquad (3.30)$$

Дисперсия скорости тахионного газа не зависит от λ_{0} и от параметров p_{0},p. Это обстоятельство оправдывает усреднение (3.23) при фиксированных параметрах p_{0},p. Полученные результаты верны в случае непрерывной геометрии пространства-времени, когда $\lambda_{0}=0$. Формально, полученные выше результаты не могут быть получены для случая, когда $p_{0}=0$, и этот случай рассматривается отдельно.

3.2 Случай $p_{0}=0$

В этом случае уравнения (3.5), (3.6) принимают вид

$$\left(c^{2}-2V\right)\alpha_{0}^{2}-\left(\mathbf{p}+\boldsymbol{\alpha}\right)^{2}-\lambda_{0}^{2}=-\mathbf{p}^{2}-\lambda_{0}^{2}=-\left|\mu\right|^{2}, \qquad (3.31)$$

$$\left(c^{2}-2V\right)\alpha_{0}^{2}-\left(2\mathbf{p}+\boldsymbol{\alpha}\right)^{2}-\lambda_{0}^{2}=4\left(-\mathbf{p}^{2}-\lambda_{0}^{2}\right), \qquad (3.32)$$

Эти уравнения приводятся к виду

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}=\alpha_{\parallel}p=\frac{3}{2}\lambda_{0}^{2},\quad\left(c^{2}-2V\right)\alpha_{0}^{2}-\boldsymbol{\alpha}_{\perp}^{2}=3\lambda_{0}^{2}+\left(\frac{3\lambda_{0}^{2}}{2p}\right)^{2} \qquad (3.33)$$

Решение уравнений (3.33) имеет вид

$$\alpha_{0}=\frac{r_{2}\cosh\theta}{\sqrt{c^{2}-2V}},\quad\alpha_{\parallel}=\frac{3\lambda_{0}^{2}}{2p},\quad\alpha_{\perp1}=r_{2}\sinh\theta\cos\phi,\quad\alpha_{\perp2}=r_{2}\sinh\theta\sin\phi, \qquad (3.34)$$

$$r_{2}^{2}=3\lambda_{0}^{2}+\frac{9\lambda_{0}^{4}}{4p^{2}}=3\lambda_{0}^{2}+\frac{9\lambda_{0}^{4}}{4\left(\left|\mu\right|^{2}-\lambda_{0}^{2}\right)} \qquad (3.35)$$

Здесь θ,ϕ суть произвольные вещественные числа, как в случае $p_{0}\neq0$.

Усредним $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}^{2}$, определенные соотношениями (3.20) (3.34). Используя соотношения типа (3.23), получаем

$$\left\langle u_{\parallel}\right\rangle=\left\langle \frac{p+\alpha_{\parallel}}{p_{0}+\alpha_{0}}\right\rangle=\left\langle \frac{\left(p+\frac{3\lambda_{0}^{2}}{p}\right)\sqrt{c^{2}-2V}}{r_{2}\cosh\theta}\right\rangle=0,\quad\left\langle \mathbf{u}_{\perp}\right\rangle=0 \qquad (3.36)$$

$$\left\langle u_{\|}^2 \right\rangle = \left\langle u_{\|} \right\rangle^2 = 0 \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{u}_{\perp}^2 \right\rangle &= \left\langle \left| \frac{\boldsymbol{\alpha}_{\perp}}{\alpha_0} \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} \sqrt{c^2 - 2V} \right)^2 \right\rangle = \frac{2\pi \left(c^2 - 2V\right)}{4\pi \sinh \Theta} \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{\sinh^2 \theta}{\cosh \theta} d\theta \\ &= \left(c^2 - 2V\right) + \mathcal{O}\left(\cosh^{-1} \Theta\right)\end{aligned} \tag{3.38}$$

В результате получаем в пределе $\Theta \to \infty$

$$\left\langle \mathbf{u}^2 \right\rangle = \lim_{\Theta \to \infty} \left(\left\langle u_{\|}^2 \right\rangle + \left\langle \mathbf{u}_{\perp}^2 \right\rangle \right) = \left(c^2 - 2V\right) \tag{3.39}$$

Результаты (3.36) – (3.39) согласуются с соотношениями (3.24), (3.26), (3.30) в случае, когда $p_0 \ll p$, и скорость $v = p/p_0 \to \infty$.

Вообще говоря, тахионный газ может описываться некоторым распределением параметров $p_0, \mathbf{p}$ (а не только фиксированными значениями этих параметров). Это слабо влияет на распределение скоростей в тахионном газе.

Давление P тахионного газа определяется соотношением

$$P = \frac{1}{3} \rho \left(\left\langle \mathbf{u}^2 \right\rangle - \left\langle |\mathbf{u}| \right\rangle^2 \right) \tag{3.40}$$

Здесь $\rho = \rho(x)$ есть плотность массы тахионного газа. Из (3.37), (3.39) следует, что

$$P(x) = \frac{1}{3} \rho(x) \left(c^2 - 2V(\mathbf{x})\right) \tag{3.41}$$

Все параметры тахионного газа $\rho, \mathbf{u}, P$ рассматриваются как функции точек $x = \{x^0, \mathbf{x}\}$ пространства-времени. Но гравитационный потенциал $V(\mathbf{x})$ рассматривается как функция пространственных координат $\mathbf{x}$.

4 Равновесное состояние тахионного газа в гравитационном поле

В гравитационном поле галактики тахионный газ может находится в покое, если выполнено условие равновесия

$$\nabla P = \rho \nabla V \tag{4.1}$$

В соответствии с (3.41) это условие записывается в виде

$$\frac{1}{3} \left(c^2 - 2V(\mathbf{x})\right) \nabla \rho = \frac{5}{3} \rho \nabla V(\mathbf{x}) \tag{4.2}$$

Уравнение (4.2) интегрируется в виде

$$\rho = \frac{\rho_0 c^5}{\sqrt{\left|c^2 - 2V(\mathbf{x})\right|^5}} \tag{4.3}$$

Здесь $\rho_0 = \text{const}$.

В сферически симметричном гравитационном поле галактики получаем вместо (4.3)

$$\rho\left(r\right)=\frac{\rho_0 c^5}{\sqrt{\left|c^2-2V\left(r\right)\right|^5}} \tag{4.4}$$

Если гравитационное поле не слишком сильно и $2V\left(r\right)\ll c^2$, потенциал $V\left(r\right)$ может быть аппроксимирован выражением

$$V\left(r\right)=\frac{GM}{r}+\frac{4\pi G}{3}\rho_0 r^2 \tag{4.5}$$

Здесь G есть гравитационная постоянная и M есть масса галактики. Выражение (4.4) принимает вид

$$\rho\left(r\right)=\frac{\rho_0 c^5}{\sqrt{\left|c^2-\frac{2GM}{r}-\frac{8\pi}{3}G\rho_0 r^2\right|^5}}\approx\rho_0\left(1+\frac{5GM}{rc^2}+\frac{20\pi G}{3c^2}\rho_0 r^2\right) \tag{4.6}$$

Если ρ_0 достаточно велико и $20\pi\rho_0 r^2\geq 15Mr^{-1}$, то плотность $\rho\left(r\right)$ может даже увеличиваться с ростом r. Во всяком случае, второй член в (4.6) ослабляет уменьшение плотности $\rho\left(r\right)$ с увеличением r.

Из (4.3) следует, что плотность тахионного газа больше в областях с большим гравитационным потенциалом. Это означает, что тахионный газ притягивается массивными телами как обычный газ из тардионов. Кроме того плотность тахионов меняется медленно с изменением гравитационного потенциала, тогда как в изотермической атмосфере обычного газа эта зависимость экспоненциальна. Слабая зависимость плотности тахионного газа от гравитационного потенциала облегчает образование гало с почти постоянной плотностью тахионного газа.

Замечание. При усреднении решения динамических уравнений предполагалось, что гравитационный потенциал V постоянен. Вообще говоря, следовало учесть зависимость потенциала V от координат и, следовательно, от 4-вектора α, по которому производится усреднение. Мы надеемся, что наше приближение не изменит существенно свойства тахионного газа. Два главных свойства тахионного газа (его сильная мобильность и очень высокое давление) не должны сильно зависеть от вида гравитационного потенциала.

5 Темная энергия

Создается впечатление, что многие космологические проблемы связаны с использованием римановой геометрии пространства-времени, которая неадекватна применительно к общей теории относительности, потому что методы дифференциальной геометрии описывают только малую часть возможных геометрий пространства-времени. Наблюдаемое ускоренное расширение вселенной обычно объясняется так называемой темной энергией. Имеются разные версии природы темной энергии [14, 15], но все эти версии пытаются объяснить космическую антигравитацию, которая является причиной ускоренного расширения вселенной. Традиционная ОТО, основанная на римановой геометрии пространства-времени, может объяснить антигравитацию только при помощи отрицательной массы, отрицательного давления или с помощью так называемого Λ-члена, взятого с надлежащим знаком.

Расширенная общая теория относительности (РОТО) использует более общий класс геометрий пространства-времени. В физических геометриях РОТО [12, 13] сферическое пылевое облако радиуса R и массы M не может коллапсировать и образовать черную дыру, потому что при уменьшении радиуса R параметр $\varepsilon_0 = 2GM/\left(c^2R\right)$ становится достаточно большим, и в центре облака возникает область антигравитации. Антигравитация препятствует появлению черной дыры. Невозможность коллапса предписывает другой сценарий для гравитационного сжатия пылевого облака. Когда радиус R облака уменьшается в результате гравитационного сжатия, параметр ε_0 увеличивается, и внутри облака появляется область антигравитации, которая препятствует дальнейшему сжатию. Однако облако продолжает сжиматься по инерции. Когда параметр ε_0 становится достаточно большим сжатие останавливается и начинается противоположный процесс. Центральная область облака начинает расширяться. Имеются различные стадии расширения. На некоторой стадии расширение может ускоряться. На других стадиях скорость расширения может уменьшаться. Возможно, что различные части центральной области облака могут находиться в различных стадиях расширения. Важно, что нет необходимости изобретать мифические сущности подобные отрицательному давлению и квинтэссенции. Нужно только построить правильную модель расширения вселенной, основанную на правильной концепции геометрии пространства-времени.

6 Заключительные замечания

Наши заключения зависят от существования и свойств тахионов, и эти свойства кажутся довольно неожиданными. Эта неожиданность обусловлена фундаментальным изменением подхода к геометрии. Здесь используется метрический подход к геометрии, когда геометрия рассматривается как наука о форме и расположении геометрических объектов. При таком походе геометрия полностью описывается ее мировой функцией и только мировой функцией. Хотя никто не отрицает метрический поход, тем не менее математический формализм дифференциальной геометрии основан на идее, что любая геометрия является логическим построением, и все утверждения геометрии могут быть выведены из нескольких геометрических аксиом. Логическая структура геометрии рассматривается как главное свойство геометрии. Так называемая симплектическая геометрия рассматривается как геометрия, потому что ее логическая структура напоминает структуру евклидовой геометрии, Хотя симплектическая геометрия не имеет отношения к описанию геометрических объектов.

Математический формализм, адекватный метрическому подходу был неизвестен. Попытки построить такой формализм не увенчались успехом [16, 1]. Формализм мировой функции был предложен Дж.Л.Сингом, который использовал его для описания римановой геометрии пространства-времени [17]. Однако ему тоже не удалось получить бескоординатное описание геометрии пространства-времени.

Тахионы и их свойства могут быть эффективно описаны только в рамках дискретной геометрии пространства-времени. Однако дискретная геометрия может быть построена только в рамках метрического подхода, и она не может быть построена методами дифференциальной геометрии. В результате тахионы остались вне области рассмотрения геометрии пространства-времени. Они рассматривались как гипотетические частицы, и свойства их были неизвестны.

Сейчас тахионный газ рассматривается как реальный газ, чье гравитационное воздействие может быть отождествлено с гравитационным влиянием таинственной темной материи. Статику тахионного газа удалось построить только благодаря бескоординатному формализму метрического подхода к геометрии. Динамика тахионного газа пока не построена. Возможность существования тахионов следует из математического формализма, основанного на использовании мировой функции. Никакие новые гипотезы о свойствах тахионов не использовались. Тахионный газ в качестве кандидата на роль темной материи обладает таким свойством как очень высокое давление, которое необходимо для образования обширного гало. Другие кандидаты на роль темной материи не обладают этим свойством.

Список литературы

[1] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953.

[2] A. Sommerfeld, Simplified deduction of the field and the forces of an electron moving in any given way". *Knkl. Acad. Wetensch* **7**, *345–367, (1904).*

[3] Ya.P. Terletsky. Positive, negative and imaginary rest masses. *J. de Physique at le Radium* **23,** *iss 11, 910-920 (1963).*

[4] O.-M. P. Bilaniuk, V. K. Deshpande, E. C. G. Sudarshan, "Meta' Relativity". *American Journal of Physics* **30***(10), 718, (1962).*

[5] G. Feinberg, "Possibility of Faster-Than-Light Particles". *Physical Review* **159 (5)**: *1089–1105. (1967)*

[6] G. Feinberg *Phys. Rev. D* **17**, *1651 (1978).*

[7] Aharonov, Y.; Komar, A.; Susskind, L. . "Superluminal Behavior, Causality, and Instability". *Phys. Rev. 182 (5), 1400–1403.(1969)*

[8] Yu.A.Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, *iss. 12, 733-760, (2002)*, see also *e-print math.MG/0103002.*

[9] Yu.A. Rylov, Discrete space-time geometry and skeleton conception of particle dynamics. *Int. J. Theor. Phys.* **51**, 1847-1865, (2012), DOI: 10.1007/s10773-011-1061-y, *e-print 1110.3399v1*

[10] Yu.A. Rylov, Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. *Journ. Math. Phys.* **32(8)**, 2092-2098, (1991)

[11] D.Merritt, et al. , Empirical Models for Dark Matter Halos. I. Nonparametric Construction of Density Profiles and Comparison with Parametric Models *The Astronomical Journal,* **132**, *Issue 6, pp. 2685-2700, (2006).*DOI: 10.1086/508988

[12] Yu. A.Rylov, (2010) General relativity extended to non-Riemannian space-time geometry. *e-print 0910.3582v7*

[13] Yu. A.Rylov, Induced antigravitation in the extended general relativity. *Gravitation and Cosmology*, **18**, No. 2, pp. 107–112,(2012).

[14] А.Д.Чернин, Физический вакуум и космическая антигравитация. УФН, **178**, вып. 3, 267, (2008).

[15] В.Н.Лукаш, В.А.Рубаков, Темная энергия: мифы и реальность. УФН, **178**, вып. 3, pp. 301-108, (2008).

[16] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**, 75-113, (1928)

[17] J.L.Synge, *Relativity: the General Theory.* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1960.