Статистический ансамбль как динамическая система

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
Россия 117526, Москва, Пр. Вернадского 01-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Показано, что описание движения стохастической частицы в рамках аксиоматической квантовой механики не является полным. Описание движения стохастической частицы в рамках классической газовой динамики является более полным.

Статистический ансамбль является инструментом для статистического описания детерминированных или недетерминированных процессов. Понятие статистического ансамбля несколько различается в разных разделах физики. Обычно статистический ансамбль рассматривается как некая надстройка над динамикой. Динамика может быть классической или квантовой. В обоих случаях статистический ансамбль является надстройкой над динамикой. Но статистический ансамбль не определяется как объект динамики. Людвиг Больцман был первым исследователем, который использовал статистический ансамбль как динамическую систему для описания стохастического движения молекул газа. Но в этом случае он не использовал термин "статистический ансамбль".

Мы определяем статистический ансамбль как динамическую систему, состоящую из многих тождественных динамических систем $\mathcal{S}$. Например, газ, состоящий из многих тождественных молекул, является динамической системой. Этот газ является статистическим ансамблем недетерминированных тождественных молекул. Если столкновения газовых молекул отсутствуют, то движение молекул газа детерминировано, и можно получить динамические уравнения для движения отдельной молекулы из уравнений газовой динамики. Если имеются столкновения между молекулами, то движение молекул стохастично (индетерминировано). В этом случае динамических уравнений для отдельной молекулы не существует. Однако, среднее движение отдельной молекулы можно получить из газодинамических уравнений. Другими словами, газ как динамическая система позволяет получить некоторую статистическую информацию о движении отдельной молекулы. Исследуя свойства столкновений молекул, которые ответственны за стохастичность движения молекул газа, Больцман получил кинетическое уравнение. которое описывает эволюцию распределения скоростей. Другими словами, Больцман получил статистическое описание стохастического движения отдельной молекулы, хотя динамические уравнения для движения отдельной молекулы не существуют. В данном случае газ играет роль статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}\right]$, где $\mathcal{S}$ есть отдельная молекула.

Работы Больцмана были недооценены научным сообществом, которое рассматривало их как работы по динамике газа, тогда как они были, на самом деле, они были работами по статистическому описанию движения недетерминированных частиц. Это стало особенно ясно, когда оказалось, что квантовые частицы могут описываться с помощью газовой динамики, где молекулы могут взаимодействовать через силовое поле κ вместо столкновений.

Если рассматривать набор из многих тождественных невзаимодействующих частиц, статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}\right]$ (газ) описывается действием

$$\mathcal{A}\left[x\right] = -\int mc\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}d\tau d\boldsymbol{\xi}, \quad \dot{x}^i \equiv \frac{\partial x^i\left(\tau,\boldsymbol{\xi}\right)}{\partial\tau} \tag{1}$$

где $x = \left(x^0\left(\tau,\boldsymbol{\xi}\right), x^1\left(\tau,\boldsymbol{\xi}\right), x^2\left(\tau,\boldsymbol{\xi}\right), x^3\left(\tau,\boldsymbol{\xi}\right)\right)$, $\boldsymbol{\xi} = \left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)$ есть маркировка частиц (лагранжевы координаты), τ есть параметр вдоль мировой линии частицы, m есть масса частицы и c есть скорость света.

Если частицы взаимодействуют через некоторое поле $\kappa^i = \left(\kappa^0\left(x\right), \kappa^1\left(x\right), \kappa^2\left(x\right), \kappa^3\left(x\right)\right)$, которое изменяет массу частицы

$$m \to M = m\sqrt{1 + \lambda^2\left(\kappa_i\kappa^i + \partial_i\kappa^i\right)}, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2}$$

то действие принимает вид

$$\mathcal{A}\left[x,\kappa\right] = -\int mcK\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}d\tau d\boldsymbol{\xi}, \tag{3}$$

$$K = \frac{M}{m} = \sqrt{1 + \lambda^2\left(\kappa_i\kappa^i + \partial_i\kappa^i\right)} \tag{4}$$

Динамические уравнения для переменных x и κ получаются из (3) с помощью варьирования (3) по переменным x^i и κ^i соответственно.

Вариация действия (3) приводит к динамическому уравнению

$$-\hbar^2\partial_k\partial^k\psi - \left(m^2c^2 + \frac{\hbar^2}{4}\left(\partial_l s_\alpha\right)\left(\partial^l s_\alpha\right)\right)\psi = -\hbar^2\frac{\partial_l\left(\rho\partial^l s_\alpha\right)}{2\rho}\left(\sigma_\alpha - s_\alpha\right)\psi \tag{5}$$

где ψ есть двухкомпонентная волновая функция. 3-вектор $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3,\}$ определяется соотношениями

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad s_\alpha = \frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{6}$$

$$\psi = \binom{\psi_1}{\psi_2}, \qquad \psi^* = \left(\psi_1^*, \psi_2^*\right), \tag{7}$$

а $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ суть 2×2 матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

Волновая функция ψ была введена, потому что волновая функция является естественным атрибутом механики сплошной среды [1].

В случае потенциального течения волновая функция однокомпонентна. Динамическое уравнение (5) превращается в уравнение Клейна-Гордона

$$-\hbar^2 \partial_k \partial^k \psi - m^2 c^2 \psi = 0 \tag{9}$$

Детали получения уравнения (5) можно найти в [2].

Связь между газовой динамикой и квантовыми уравнениями известна давно [3, 4]. Однако, эта связь была односторонней. Можно было получить уравнения газовой динамики из уравнения Шредингера, но получить уравнение Шредингера из уравнений газовой динамики не умели. В этом отношении получение уравнения Клейна-Гордона как уравнения газовой динамики выглядит как обратная операция, когда квантовые уравнения выводятся из уравнений динамики сплошной среды.

Таким образом, квантовое динамическое уравнение может быть получено в рамках классической динамики без использования квантовых принципов. Это очень неожиданный результат, потому что принято думать, что уравнение Клейна-Гордона может быть получено только в рамках аксиоматической квантовой теории при использовании квантовых принципов. Уравнение Клейна-Гордона (9) есть просто классическое динамическое уравнение для газа, где взаимодействие молекул описывается соотношением (2). Это означает, что квантовые явления могут быть объяснены в рамках классической динамики, если найти подходящее взаимодействие между частицами.

Кроме того, пример рассмотрения Больцмана показывает, что описание стохастичности частицы с помощью уравнений газовой динамики не является полным. Исследование поля, ответственного за взаимодействие молекул ((столкновений) позволяет получить более полное полное описание стохастичности движения молекул в терминах кинетического уравнения. Уравнение Клейна-Гордона (9) является разновидностью уравнения классической газовой динамики. Следует ожидать, что исследование κ-поля (2) позволит получить более полное описание квантовой стохастичности.

В аксиоматической квантовой теории, где квантовая стохастичность определяется квантовыми принципами, уравнение Клейна-Гордона (9) реализует максимально возможное описание стохастичности движения частицы. Описание квантовой частицы в терминах классической динамики, где за квантовую стохастичность ответственно некоторое классическое силовое поле, порождает новое направление в теории элементарных частиц. Некоторое силовое поле κ ответственно за квантовые эффекты, и это поле порождает внутреннюю структуру элементарных частиц. Элементарные частицы имеют некоторую внутреннюю структуру в рамках этого направления. Они не являются точечными объектами, как это имеет место в аксиоматической квантовой теории. Существование κ-поля (2) обусловлено дискретной геометрией пространства-времени, и квантовая постоянная $\hbar$ связана с минимальной длиной λ_0 дискретной геометрии пространства-времени. Исследование κ-поля порождает структурное направление в теории элементарных частиц [5], которое позволяет исследовать внутреннюю структуру элементарных частиц.

Удивительно, как изменение определения статистического ансамбля порождает существенное изменение теории элементарных частиц.

Список литературы

[1] Yu.A.Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.***40**, 256 -278, (1999)

[2] Yu.A.Rylov, Logical reloading. What is it and what is a profit from it? *Int. J. Theor, Phys.* **53**, iss. 7, pp.2404-2433, (2014), DOI: 10.1007/s10773.014.2039 .3

[3] E. Madelung, "Quanten theorie in hydrodynamischer Form *Z.Phys.* **40,** 322-326, (1926).

[4] D. Bohm, On possibility of the quantum mechanics interpretation on basis of representation on hidden variables, *Phys.Rev.* **85**, *166,(1952), 180,(1952).*

[5] Yu. A. Rylov, Structural approach to the elementary particle theory. In *Space-Time Geometry and Quantum Events.* Ed.Ignazio Licata. pp.227-315, Nova Science Publishers, Inc. ISBN 978-1-63117-455-1