Неевклидов метод построения обобщенных геометрий и его применение к геометрии пространства-времени.

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Рассматривается неевклидов метод построения обобщенной геометрии. В соответствии с этим подходом любая обобщенная геометрия может быть построена в результате деформации собственно евклидовой геометрии. Метод может быть применен для построения пространственно-временных геометрий. В качестве примера рассматривается однородная и изотропная геометрия пространства-времени, отличная от геометрии Минковского. В такой геометрии пространства-времени может быть поставлена проблема существования геометрических объектов и их временно́й эволюции. Такая постановка вопроса не возможна в римановой геометрии пространства-времени. Существование и динамика микрочастиц рассматриваются как обусловленные существованием соответствующих геометрических объектов и их временной эволюции в пространстве-времени. Возникает геометризация импульса частицы и ее массы.

1 Введение

Любая (обобщенная) геометрия представляет собой множество утверждений о свойствах геометрических объектов. Геометрический объект представляет собой подмножество точек точечного множества Ω, на котором задается геометрия. Число таких утверждений очень велико, и маркировку этих утверждений с помощью вещественных чисел довольно трудно осуществить, потому что мощность множества вещественных недостаточна для осуществления такой маркировки. Маркировка с помощью функций оказывается более эффективной, потому что множество функций оказывается более мощным, чем множество вещественных чисел. Пусть, например, f есть целочисленная функция целочисленного аргумента x. Пусть $f \in [0, M-1]$ и $x \in [0, N-1]$, где M и N – натуральные числа. Тогда число N_f всех функций f равно $N_f = M^N$. Если f является функцией двух целочисленных аргументов $x_1 \in [0, N-1]$ и $x_2 \in [0, N-1]$, то число функций $N_f = M^{\left(N^2\right)}$. Другими словами, число функций N_f растет гораздо быстрее, чем число значений N аргументов функции и число M значений функции. Таким образом, маркировка геометрических утверждений с помощью функций кажется более эффективной, чем маркировка с помощью чисел.

Однако, исследуя функции вещественных переменных, никто не пытается подсчитать число таких функций. Такой подсчет производится только для булевых функций от булевых аргументов. В этом случае $M = 2$, $N = 2$ и $N_f = 2^2 = 4$. В случае булевых функций двух аргументов мы имеем $N_f = 2^4 = 16$. Функции вещественных переменных строятся и исследуются с помощью последовательных комбинаций простых алгоритмов, таких как сложение, умножение, возведение в степень, взятие логарифма и т.д.

Т-геометрия представляет собой геометрию, которая строится с помощью деформации собственно евклидовой геометрии. Всякая геометрия представляет собой построение, которое описывает взаимное расположение точек и геометрических объектов на точечном множестве Ω. Взаимное расположение точек $P, Q \in \Omega$ описывается расстоянием $\rho(P, Q)$ между любыми двумя точками $P, Q \in \Omega$. В геометрии пространства-времени расстояние вещественно и положительно для некоторых пар точек, и оно является чисто мнимым для других пар точек. Более удобно использовать функцию $\sigma(P, Q) = \frac{1}{2}\rho^2(P, Q)$, которая вещественна для любой пары точек. Функция $\sigma(P, Q)$ известна как мировая функция [1]. Мы будем использовать мировую функцию для описания взаимного расположения точек на точечном множестве Ω.

Следует ожидать, что задав мировую функцию

$$\sigma: \qquad \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(P, Q) = \sigma(Q, P), \qquad \sigma(P, P) = 0 \tag{1.1}$$

для всех пар P, Q точек на точечном множестве Ω, мы полностью определим геометрию. Мы покажем это для собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, описываемой евклидовой мировой функцией σ_{E}. После этого мы распространим этот результат на любую геометрию $\mathcal{G}$, описываемую произвольной мировой функцией σ, удовлетворяющей соотношениям (1.1).

Современное изложение собственно евклидовой геометрии основывается на концепции линейного векторного пространства V_n, оснащенного скалярным произведением любых двух векторов. Здесь индекс n означает размерность линейного векторного пространства, которая определяется как максимальное число линейно независимых векторов. Точечное n-мерное евклидово пространство E_n получается из n-мерного векторного линейного пространства V_n, если рассматривать все те векторы, начала которых совпадают. Тогда множество концов всех таких векторов образует точечное евклидово пространство $\Omega = \mathbb{R}^n$. Любые две точки P, Q образуют вектор $\mathbf{PQ} \equiv \overrightarrow{PQ}$, принадлежащий векторному пространству $V_n = \mathbb{R}^n$.

Вектор $\mathbf{PQ} \equiv \overrightarrow{PQ}$ представляет собой упорядоченное множество из двух точек $\{P, Q\}$, $P, Q \in \mathbb{R}^n$. Длина $|\mathbf{PQ}|_{\mathrm{E}}$ вектора $\mathbf{PQ}$ определяется соотношением

$$|\mathbf{PQ}|_{\mathrm{E}}^2 = 2\sigma_{\mathrm{E}}(P, Q) \tag{1.2}$$

где индекс "E"означает, что длина вектора берется в собственно евклидовом пространстве.

Скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)_{\mathrm{E}}$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$, имеющих общее начало P_0, определяется соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)_{\mathrm{E}} = \sigma(P_0, P_1)_{\mathrm{E}} + \sigma(P_0, P_2)_{\mathrm{E}} - \sigma(P_1, P_2)_{\mathrm{E}} \tag{1.3}$$

которое получается из евклидова соотношения

$$|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|_{\mathrm{E}}^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{E}}^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|_{\mathrm{E}}^2 + |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{E}}^2 - 2(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)_{\mathrm{E}} \tag{1.4}$$

с помощью соотношения (1.2). В частности,

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)_{\mathrm{E}} = 2\sigma_{\mathrm{E}}(P_0, P_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{E}}^2 \tag{1.5}$$

Заметим, что соотношение (1.3) представляет собой определение скалярного произведения через мировую функцию σ_{E}, тогда как в концепции линейного векторного пространства соотношение (1.4) представляет собой так называемую теорему косинусов.

В собственно евклидовом пространстве можно определить скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{E}}$ двух удаленных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$. Оно определяется соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{E}} = \sigma(P_0, Q_1)_{\mathrm{E}} + \sigma(P_1, Q_0)_{\mathrm{E}} - \sigma(P_0, Q_0)_{\mathrm{E}} - \sigma(P_1, Q_1)_{\mathrm{E}} \tag{1.6}$$

которое следует из очевидного евклидова соотношения

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{E}} = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{E}} - (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0)_{\mathrm{E}} \tag{1.7}$$

и соотношения (1.3), записанного для двух слагаемых в правой части равенства (1.7).

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{E}} = \sigma(P_0, P_1)_{\mathrm{E}} + \sigma(P_0, Q_1)_{\mathrm{E}} - \sigma(P_1, Q_1)_{\mathrm{E}}$$
$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0)_{\mathrm{E}} = \sigma(P_0, P_1)_{\mathrm{E}} + \sigma(P_0, Q_0)_{\mathrm{E}} - \sigma(P_1, Q_0)_{\mathrm{E}}$$

Необходимое и достаточное условие линейной зависимости n векторов ,$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$,...$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$, определяемых $n+1$ точками $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\}$ в собственно евклидовом пространстве, представляет собой обращение в нуль определителя Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)_{\mathrm{E}}||, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{1.8}$$

Выражая скалярные произведения $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)_{\mathrm{E}}$ в (1.8) через мировую функцию σ_{E} с помощью соотношения (1.3), получаем определение линейной зависимости n векторов ,$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$,...$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ в собственно евклидовом пространстве в виде

$$F_n\left(\mathcal{P}^n\right) = 0 \tag{1.9}$$

$$F_n\left(\mathcal{P}^n\right) \equiv \det\left|\left|\sigma\left(P_0, P_i\right)_{\mathrm{E}} + \sigma\left(P_0, P_k\right)_{\mathrm{E}} - \sigma\left(P_i, P_k\right)_{\mathrm{E}}\right|\right|, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{1.10}$$

Соотношения (1.9), (1.10) образуют σ-имманентное определение линейной зависимости (т.е. определение в терминах мировой функции). Это определение получается из теоремы об условии линейной зависимости n векторов в собственно евклидовом пространстве. Определение не содержит ссылки на линейное пространство. Оно выглядит как линейная зависимость без линейного пространства.

В частности, два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ коллинеарны (линейно зависимы) $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, если

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1: \qquad \left|\left|\begin{array}{cc} \left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_{\mathrm{E}}^2 & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{E}} \\ (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)_{\mathrm{E}} & \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right|_{\mathrm{E}}^2 \end{array}\right|\right| = 0 \tag{1.11}$$

Два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ параллельны, если

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \upuparrows_{\mathrm{E}} \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{E}} = \left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_{\mathrm{E}} \cdot \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right|_{\mathrm{E}} \tag{1.12}$$

Два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ антипараллельны, если

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\downarrow_{\mathrm{E}} \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{E}} = -\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_{\mathrm{E}} \cdot \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right|_{\mathrm{E}} \tag{1.13}$$

Индекс "E"означает, что скалярное произведение и параллельность рассматриваются в собственно евклидовом пространстве.

Теперь мы можем определить эквивалентность двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в σ-имманентном виде. Два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ эквивалентны (равны), если

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1: \qquad \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \upuparrows \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right) \wedge \left(\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right| = \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right|\right) \tag{1.14}$$

или

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \quad : \qquad \left((\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right| \cdot \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right|\right) \tag{1.15}$$

$$\wedge \left(\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right| = \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right|\right) \tag{1.16}$$

Свойство эквивалентности двух векторов в собственно евклидовом пространстве обратимо и транзитивно. Это означает

$$\text{если} \quad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1, \quad \text{то} \quad \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \tag{1.17}$$

$$\text{если} \quad \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right) \wedge \left(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\mathrm{eqv}\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1\right), \quad \text{то} \quad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1 \tag{1.18}$$

Однако, эквивалентность транзитивна только в собственно евклидовой геометрии, где свойство параллельности двух векторов обратимо и транзитивно.

В произвольной обобщенной геометрии свойство параллельности, так же как и свойство эквивалентности обратимы, но, вообще говоря, интранзитивны. Интразитивность свойства эквивалентности связана с его многовариантностью, когда имеется много векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1'$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1''$,... которые эквивалентны вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, но не эквивалентны между собой. Многовариантность свойства эквивалентности обусловлена тем фактом, что уравнения (1.15), (1.16), рассматриваемые как система уравнений для определения точки Q_1 (при фиксированных точках P_0, P_1, Q_0) имеет, вообще говоря, много решений. Возможна также такая ситуация, когда уравнения (1.15), (1.16) не имеют решений. Таким образом, эквивалентность. вообще говоря, многовариантна и интранзитивна.

В собственно евклидовой геометрии система уравнений (1.15), (1.16) всегда имеет одно и только одно решение. В этом случае свойство эквивалентности одновариантно и транзитивно. Однако, уже в пространстве-времени Минковского только эквивалентность времениподобных векторов является одновариантной и транзитивной. Эквивалентность пространственноподобных векторов в пространстве-времени Минковского многовариантна и интранзитивна. Однако, никто не обращает внимания на это обстоятельство, потому что пространственноподобные векторы практически не используются в приложениях к физике и механике.

Мы будем отличать соотношение равенства (=) от соотношения эквивалентности (eqv), потому что соотношение равенства всегда одновариантно и транзитивно, тогда как соотношение эквивалентности, вообще говоря, многовариантно и интранзитивно.

Сумма $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$$

может быть определена только в том случае, когда конец P_1 вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ совпадает с началом P_1 вектора $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. Однако, используя понятие эквивалентности, можно определить сумму двух произвольных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ как вектор $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_2$ с началом в точке R_0 с помощью соотношения

$$\mathbf{R}_0\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_0\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \tag{1.19}$$

где векторы $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$ определяются соотношениями

$$\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1 \mathrm{eqv} \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \qquad \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \tag{1.20}$$

Однако, сумма $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_2$ оказывается многовариантной из-за многовариантности соотношений (1.20). Кроме того, сумма (1.19), вообще говоря, зависит от порядка слагаемых, потому что вместо соотношений (1.20) можно использовать соотношения

$$\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1 \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1, \qquad \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \mathrm{eqv} \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \tag{1.21}$$

Умножение вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ на вещественное число α определяется следующим образом. Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ является результатом умножения вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ на вещественное число α, если

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mathrm{eqv}\left(\alpha \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right): \qquad \begin{cases} \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \upuparrows \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right) \wedge \left(\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right| = \left|\alpha\right| \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right|\right), & \text{если} \quad \alpha \geq 0 \\ \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\downarrow \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right) \wedge \left(\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right| = \left|\alpha\right| \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right|\right), & \text{если} \quad \alpha < 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

Возможна другая версия умножения на вещественное число α, которая отличается от (1.22) только для $\alpha = 0$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mathrm{eqv}\left(\alpha \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right): \qquad \begin{cases} \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \upuparrows \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right) \wedge \left(\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right| = \left|\alpha\right| \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right|\right), & \text{если} \quad \alpha > 0 \\ \mathbf{P}_0\mathbf{P}_0, \quad \text{если} \quad \alpha = 0 & \\ \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\downarrow \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right) \wedge \left(\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right| = \left|\alpha\right| \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right|\right), & \text{если} \quad \alpha < 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

Для собственно евклидовой геометрии обе версии совпадают.

Для завершения σ-имманентного описания собственно евклидова пространства, нужно еще определить свойства евклидовой мировой функции σ_{E}. Они представлены во втором разделе, где можно увидеть, что эти специфические свойства различны для евклидовых пространств разной размерности.

Представление евклидовой геометрии в σ-имманентном виде (в терминах мировой функции σ_{E}) позволяет использовать неевклидов метод построения обобщенной геометрии. Евклидов метод построения геометрии основан на получении геометрических утверждений (теорем) из изначальных утверждений (аксиом) строящейся геометрии с помощью логических рассуждений и математических расчетов. Этот метод обычно используется при построении обобщенной геометрии. Он напоминает построение функции вещественного переменного с помощью простых процедур: сложения, умножения и т.д.

Основной недостаток евклидова метода состоит в необходимости проверки совместности изначальных аксиом. Такая проверка представляет собой очень сложную процедуру, которая была осуществлена только для собственно евклидовой геометрии. Кроме того изначальные аксиомы сравнительно просты только для однородных обобщенных геометрий. В этом случае аксиомы одни и те же для всех областей пространства, описываемых обобщенной геометрией. В случае неоднородной геометрии множество аксиом различно для разных областей пространства.

Поскольку существовал только евклидов метод построения геометрии, то возникла тенденция приписывать самой геометрии свойства евклидова метода построения геометрии. Поскольку обычно построение геометрии начиналось с системы аксиом, то возникла тенденция рассматривать любую систему аксиом, содержащую понятия точки и прямой как разновидность геометрии (например, проективная геометрия, аффинная геометрия и т.д.). На самом деле, евклидов метод построения геометрии и система аксиом представляют собой нечто внешнее по отношению к самой евклидовой геометрии, также как по отношению к другим обобщенным геометриям (например, по отношению к римановой геометрии). К сожалению, некоторые математики не могут отделить метод построения геометрии от самой геометрии, и это обстоятельство является причиной неприятия геометрии, построенной неевклидовым методом [2].

Предлагается неевклидов метод построения обобщенной геометрии. Этот метод может рассматриваться как построение обобщенной геометрии с помощью деформации собственно евклидовой геометрии, когда евклидова мировая функция σ_{E} заменяется мировой функцией строящейся геометрии во всех утверждениях евклидовой геометрии. Поскольку все утверждения евклидовой геометрии могут быть маркированы евклидовой мировой функцией σ_{E}, которая полностью описывает все такие утверждения, то замена $\sigma_{\mathrm{E}} \rightarrow \sigma$ во всех этих утверждениях приводит к построению обобщенной геометрии, описываемой мировой функцией σ.

Неевклидов метод построения геометрии может быть использован, если мы представим собственно евклидову геометрию в σ-имманентном виде. При этом нет необходимости выделять изначальные аксиомы. Нет необходимости проверять их совместность и выводить из них другие геометрические утверждения. При таком подходе все утверждения собственно евклидовой геометрии имеют равные права. Этот подход напоминает маркировку булевых функций, которая возможна из-за небольшого числа булевых функций. В данном случае маркировка оказывается возможной, потому что собственно евклидова геометрия уже построена и представлена в σ-имманентном виде.

Имеется другая аналогия между булевыми функциями и σ-имманентным представлением евклидовой геометрии. Булевы функции представляют собой математический инструмент формальной логики. Формализм σ-имманентного описания представляет собой математический инструмент "геометрической логики", т.е. систему правил построения обобщенной геометрии [3]. Может быть, можно даже говорить о метагеометрии, которая имеет дело со всеми геометриями одновременно.

Неожиданной чертой "геометрической логики"является многовариантность операций этой логики. Все операции традиционной формальной логики одновариантны. Это удобно и привычно. Однако, не все обобщенные геометрии могут быть построены на основе одновариантных правил логики. Кроме того, геометрия реального пространства-времени многовариантна, и поэтому важно уметь работать с многовариантной "геометрической логикой". Многовариантность оказывается очень важным общим свойством обобщенных геометрий и, в частности, геометрии пространства-времени.

Обобщенная геометрия, построенная с помощью деформации собственно евклидовой геометрии, называется T-геометрией (трубчатой геометрией), потому что в T-геометрии прямые линии представляют собой, вообще говоря, поверхности (трубки), а не одномерные линии. Этот факт обусловлен многовариантным характером параллельности в T-геометрии. В самом деле, прямая линия $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, проходящая через точки P_0, P_1, определяется соотношением

$$\mathcal{T}_{P_0P_1} = \{R|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1||\mathbf{P}_0\mathbf{R}\} \tag{1.24}$$

а коллинеарность векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ определяется одним уравнением (1.11)

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R})^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 \cdot |\mathbf{P}_0\mathbf{R}|^2 \tag{1.25}$$

В n-мерном пространстве одно уравнение (1.25) определяет, вообще говоря, $(n-1)$-мерную поверхность. Если мировая функция мало отклоняется от евклидовой мировой функции, эта поверхность выглядит как трубка.

Т-геометрия интересна своим приложением к физике, в частности, к геометрии пространства-времени и динамике. В Т-геометрии может быть поставлен вопрос о существовании геометрических объектов. В пространстве-времени Минковского вопрос о существовании геометрических объектов является тривиальным в том смысле, что любой геометрический объект (любое подмножество $\mathcal{O}$ точек точечного пространства Ω) может рассматриваться как существующий.

Пусть множество точек $\mathcal{O}_{P_0P_1...P_n} = \mathcal{O}\left(\mathcal{P}^n\right)$ является геометрическим объектом, где $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\}$ суть $n+1$ характерных точек, определяющих геометрический объект $\mathcal{O}\left(\mathcal{P}^n\right)$. Проблема существования геометрического объекта $\mathcal{O}\left(\mathcal{P}^n\right)$ формулируется следующим образом. Геометрический объект $\mathcal{O}\left(\mathcal{P}^n\right)$ существует в точке $P_0 \in \Omega$, если в любой точке $Q_0 \in \Omega$ можно построить такое подмножество точек $\mathcal{O}\left(\mathcal{Q}^n\right)$, $\mathcal{Q}^n \equiv \{Q_0, Q_1, ...Q_n\}$, что выполняются $n\left(n+1\right)/2$ уравнений

$$\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k, \qquad i,k = 0,1,...n, \qquad i<k \tag{1.26}$$

В соответствии с (1.14) эквивалентность $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k$ означает два соотношения

$$\left(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k.\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k\right) = \left|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k\right| \cdot \left|\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k\right|, \qquad \left|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k\right| = \left|\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k\right| \tag{1.27}$$

Таким образом, соотношения (1.26) образуют систему из $n(n+1)$ уравнений для определения $4n$ координат точек $Q_1, Q_2, ...Q_n$ в 4-мерном пространстве-времени. Координаты точки Q_0 заданы, потому что они определяют смещение объекта $\mathcal{O}\left(\mathcal{Q}^n\right)$. В пространстве-времени Минковского из соотношений $\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_k\right) \wedge \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_i\right)$ следует, что $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_i \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_k\mathbf{Q}_i$, при условии, что все векторы времениподобны. Это означает, что не все уравнения (1.26) независимы. Вместо $n(n+1)$ уравнений (1.27) получаем $2n$ соотношений

$$\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_k\right) = \left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right| \cdot \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_k\right|, \qquad \left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right| = \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_k\right|, \qquad k = 1,2,...n \tag{1.28}$$

для определения $4n$ координат точек $Q_0, Q_1, ...Q_n$.

Структура соотношений (1.28) в пространстве-времени Минковского такова, что два соотношения

$$\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_k\right) = \left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right| \cdot \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_k\right|, \qquad \left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right| = \left|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_k\right| \tag{1.29}$$

однозначно определяют четыре координаты точки Q_k, при условии, что вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$ времениподобен, т.е. $\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right|^2 > 0$.

В других однородных изотропных геометриях пространства-времени структура соотношений (1.29) имеет другой характер. В этом случае два соотношения (1.29) не определяют однозначно четырех координат точки Q_k. Кроме того, соотношение $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_i \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_k\mathbf{Q}_i$ не является следствием соотношений $\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_k\right) \wedge \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_i\right)$, а соотношения (1.26) образуют $n\left(n+1\right)$ соотношений, являющихся, вообще говоря, независимыми.

Для двух характерных точек Q_0, Q_1 получаем $n = 1$, и число уравнений $n(n+1) = 2$ меньше, чем число координат $4n = 4$ точки Q_1.

В случае трех характерных точек Q_0, Q_1, Q_2 получаем $n = 2$, и число уравнений $n(n+1) = 6$ меньше, чем число координат $4n = 8$ точек Q_1, Q_2.

В случае четырех характерных точек Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 получаем $n = 3$, и число уравнений $n(n+1) = 12$ равно числу координат $4n = 12$ точек Q_1, Q_2, Q_3.

Наконец, в случае пяти характерных точек Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 получаем $n = 4$, и число уравнений $n(n+1) = 20$ больше числа координат $4n = 16$ точек Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.

Это означает, что геометрические объекты, имеющие больше четырех характерных точек, вообще говоря, не существуют в многовариантном пространстве-времени.

Во втором разделе представлены специфические свойства евклидовой мировой функции, которые образуют необходимые и достаточные условия евклидовости. Третий и четвертый разделы посвящены рассмотрению эквивалентности времениподобных векторов. В пятом разделе рассматривается эквивалентность изотропных векторов. Построение геометрических объектов рассматривается в шестом разделе. Временная эволюция прямолинейного отрезка рассматривается в седьмом разделе.

2 Специфические свойства n-мерного собственно евклидова пространства

Имеются четыре условия, являющиеся необходимыми и достаточными условиями того, что мировая функция σ является мировой функцией n-мерного евклидова пространства [4]. Они имеют вид:

I. Определение размерности:

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{2.1}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама (1.8). Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ...n$ являются базисными векторами прямолинейной системы координат K_n с началом в точке P_0, и метрическими тензорами $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, ...n$ в K_n. Они определены соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\, g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta_l^i, \qquad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \qquad i, l = 1, 2, ...n \tag{2.2}$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||g_{ik}(\mathcal{P}^n)|| \neq 0, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{2.3}$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\,(x_i(P) - x_i(Q))\,(x_k(P) - x_k(Q)), \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{2.4}$$

где координаты $x_i(P)$, $x_i(Q)$, $i=1,2,...n$ точек P и Q являются координатами векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ соответственно, определяются соотношениями

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i=1,2,...n \tag{2.5}$$

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения

$$g_k > 0, \qquad k=1,2,...,n \tag{2.6}$$

IV. Уравнение непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbb{R}, \qquad i=1,2,...n \tag{2.7}$$

рассматриваемая в качестве системы уравнений для определения точки P как функции координат $y=\{y_i\}$, $i=1,2,...n$ всегда имеет одно и только одно решение. Условия I – IV содержат ссылку на размерность n евклидова пространства.

3 Эквивалентность двух векторов

Свойство эквивалентности двух векторов может быть введено в T-геометрии с помощью соотношения (1.14). Однако, в произвольной T-геометрии равенство векторов, вообще говоря, интранзитивно из-за многовариантности свойства параллельности. Интранзитивность и многовариантность равенства двух векторов очень неудобна в приложениях. Мы будем использовать термин "эквивалентность"вместо термина "равенство", оставив термин "равенство"для случая его транзитивности.

Определение. Два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ эквивалентны ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$), если выполнено условие (1.14)

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1: \qquad ((\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|\cdot|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|) \wedge (|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|) \tag{3.1}$$

Из условия (3.1) следует, что, если выполнено $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)\mathrm{eqv}(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$, то выполняется $(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)\mathrm{eqv}(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)$

Замечание. Мы различаем между равенством ($=$) векторов и эквивалентностью (eqv) векторов. Например, равенство $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1$ означает, что точки P_1 и Q_1 совпадают ($P_1 = Q_1$). Равенство $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ означает, что точка P_1 совпадает с точкой Q_1 ($P_1 = Q_1$) и точка P_0 совпадает с точкой Q_0 ($P_0 = Q_0$), тогда как эквивалентность $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ означает выполнение соотношений (3.1). Точка P_0 может не совпадать с точкой Q_0 и точка P_1 может не совпадать с точкой Q_1, т.е. равенства $P_0 = Q_0$ и $P_1 = Q_1$ могут не выполняться.

Вектор сдвига $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0$ описывает сдвиг начала P_0 вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Вектор сдвига $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1$ описывает сдвиг конца вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. В собственно евклидовом пространстве эквивалентность векторов сдвига $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1$ приводит к эквивалентности векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, и наоборот, эквивалентность векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ приводит к эквивалентности их векторов сдвига $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0\mathrm{eqv}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1$. В общем случае T-геометрии эквивалентности векторов сдвига $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1$ недостаточно для эквивалентности векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$. Необходимы дополнительные ограничения $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|$ или $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \upuparrows \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, чтобы обеспечить их эквивалентность.

Теорема. Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ эквивалентны, если эквивалентны векторы сдвига $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1$ и кроме того $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|$, или $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$

Пусть ($\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0\mathrm{eqv}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1$). Эквивалентность векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1$ записывается в виде двух соотношений

$$\sigma(P_0,Q_1)+\sigma(P_1,Q_0)-\sigma(P_0,P_1)-\sigma(Q_0,Q_1)=2\sqrt{\sigma(P_0,Q_0)\,\sigma(P_1,Q_1)} \tag{3.2}$$

$$\sigma(P_0,Q_0)=\sigma(P_1,Q_1) \tag{3.3}$$

В силу (3.3) уравнение (3.2) может быть записано в виде

$$\sigma(P_0,Q_1)+\sigma(P_1,Q_0)-\sigma(P_0,P_1)-\sigma(Q_0,Q_1)=\sigma(P_0,Q_0)+\sigma(P_1,Q_1) \tag{3.4}$$

Соотношение $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ записывается в виде

$$\begin{aligned}\sigma(P_0,Q_1)+\sigma(P_1,Q_0)-\sigma(P_0,Q_0)-\sigma(P_1,Q_1) &= 2\sqrt{\sigma(P_0,P_1)\,\sigma(Q_0,Q_1)} \quad (3.5)\\ \sigma(P_0,P_1)-\sigma(Q_0,Q_1) &= 0 \quad (3.6)\end{aligned}$$

Разность соотношений (3.4), (3.5) имеет вид

$$\sigma(P_0,P_1)+\sigma(Q_0,Q_1)=2\sqrt{\sigma(P_0,P_1)\,\sigma(Q_0,Q_1)} \tag{3.7}$$

Она может быть приведена к виду

$$\left(\sqrt{\sigma(P_0,P_1)}-\sqrt{\sigma(Q_0,Q_1)}\right)^2=0 \tag{3.8}$$

Пусть теперь $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|$, и выполнены соотношения (3.6), (3.7). Поскольку соотношения (3.2), (3.3) предполагаются выполненными, то соотношение (3.4) тоже выполнено. Соотношение (3.5) также выполнено, потому что оно является суммой соотношений (3.4), (3.7). Таким образом, соотношения (3.5), (3.6) выполнены. Это означает, что $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$.

Пусть теперь $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \upuparrows |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|$, и соотношение (3.5) выполнено. Поскольку соотношения (3.2), (3.3), (3.4) предполагаются выполненными, соотношение (3.7) тоже выполнено, потому что соотношение (3.7) представляет собой разность уравнений (3.4) и (3.5). Уравнение (3.6) является следствием соотношения (3.7). Таким образом, уравнения (3.5), (3.6) выполняются и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$. Теорема доказана.

Заметим, что в собственно евклидовом пространстве, где понятие эквивалентности одновариантно и транзитивно, эквивалентность может быть заменена равенством, и соотношения $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0\mathrm{eqv}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ можно записать соответственно в виде $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$. (Здесь символ –" означает одновариантную эквивалентность. Он используется в том смысле, какой он имеет в евклидовой геометрии.) Эти соотношения эквивалентны, и дополнительное условие $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|$ является следствием любого из этих условий. В самом деле, добавляя вектор $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_0$ к обоим сторонам равенства

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \tag{3.9}$$

получаем

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 \tag{3.10}$$

Кроме того, в собственно евклидовой геометрии соотношение $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ является следствием соотношений $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)\wedge(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_2)$. Чтобы доказать это, запишем эти соотношения в виде уравнений

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1, \qquad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_2 \tag{3.11}$$

Вычитая первое соотношение (3.11) из второго, получаем

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \tag{3.12}$$

Таким образом, в собственно евклидовой геометрии среди шести соотношений $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ имеется только четыре независимых условия, тогда как в общем случае все шесть условий, вообще говоря, независимы,

4 Примеры эквивалентных векторов в однородной изотропной многовариантной геометрии пространства-времени

Рассмотрим σ-пространство $V_{\mathrm{d}} = \{\sigma, \mathbb{R}^4\}$ с мировой функцией

$$\sigma_{\mathrm{d}} = \begin{cases} \sigma_{\mathrm{M}} + d, & \text{если } \sigma_{\mathrm{M}} > 0 \\ \sigma_{\mathrm{M}}, & \text{если } \sigma_{\mathrm{M}} \leq 0 \end{cases}, \qquad d = \lambda_0^2 = \mathrm{const} > 0 \tag{4.1}$$

где σ_{M} есть мировая функция 4-мерного пространства-времени Минковского. В инерциальной системе координат мировая функция σ_{M} имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{M}}(P, P') = \sigma_{\mathrm{M}}(x, x') = \left(x^0 - x'^0\right)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \tag{4.2}$$

где координаты точек P и P' суть $P = \{x^0, \mathbf{x}\} = \{ct, x^1, x^2, x^3\}$, $P' = \{x'^0, \mathbf{x}'\} = \{ct', x'^1, x'^2, x'^3\}$ и c есть скорость света. Постоянная d квалифицируется как дисторсия искаженного пространства-времени V_{d}, описываемого мировой функцией σ_{d}. Постоянная λ_0 может рассматриваться как "элементарная длина", ассоциирующаяся с искаженным пространством-временем V_{d}.

Пространство-время (4.1) однородно и изотропно в том смысле, что мировая функция σ_{d} инвариантна по отношению к одновременному преобразованию Пуанкаре обоих аргументов x и x'.

Непрерывное пространство-время V_d демонстрирует проявление дискретности в том смысле, что не существует точек x, x', разделенных временниподобным интервалом $\rho = \sqrt{2\sigma(x, x')}$, с $\rho \in (0, \lambda_0)$. Кажется довольно неожиданным, что континуальное пространство-время может быть одновременно дискретным. По-видимому, дискретность такого рода следует квалифицировать как дискретность времени.

Рассмотрим два эквивалентных временниподобных вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$. Точки P_0, P_1, Q_0, Q_1 имеют координаты

$$P_0 = \{0, 0, 0, 0\}, \qquad P_1 = \{s, 0, 0, 0\} \tag{4.3}$$

$$Q_0 = \{a, b, 0, 0\}, \qquad Q_1 = \{s + a + \alpha_0, b + \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \tag{4.4}$$

Временная ось выбрана вдоль вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Вектор сдвига $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 = \{a, b, 0, 0\}$ лежит в плоскости координатных осей x^0x^1. Длина s вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и параметры сдвига a, b предполагаются заданными. Величины $\alpha_0, \beta_1, \gamma_2, \gamma_3$ подлежат определению из условия, что векторы

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{s, 0, 0, 0\}, \qquad \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 = \{s + \alpha_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \tag{4.5}$$

эквивалентны.

Поскольку геометрия однородна и изотропна, соотношения (4.3), (4.4) описывают общий случай расположения точек P_0, P_1, Q_0, Q_1 с временниподобным вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Специфичный вид формул (4.3), (4.4) получается в результате надлежащего выбора системы координат.

Рассмотрим два случая.

I. Все точки P_0, P_1, Q_0, Q_1 различны,

$$\sigma(P, Q) = \sigma_{\mathrm{M}}(P, Q) + \lambda_0^2, \qquad P \neq Q, \qquad P, Q \in \{P_0, P_1, Q_0, Q_1\} \tag{4.6}$$

II. $P_1 = Q_0$, все остальные точки P_0, P_1, Q_1 различны, и все различные точки разделены временниподобными интервалами. В этом случае имеем

$$\sigma(P, Q) = \sigma_{\mathrm{M}}(P, Q) + \lambda_0^2, \qquad P \neq Q, \qquad P, Q \in \{P_0, P_1, Q_1\} \tag{4.7}$$

$$\sigma(P_1, Q_0) = \sigma_{\mathrm{M}}(P_1, Q_0) = 0 \tag{4.8}$$

В первом случае

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}}^2 + 2\lambda_0^2, \qquad |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2 = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|_{\mathrm{M}}^2 + 2\lambda_0^2 \tag{4.9}$$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0|^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0|_{\mathrm{M}}^2 + 2\lambda_0^2, \qquad |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1|^2 = |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1|_{\mathrm{M}}^2 + 2\lambda_0^2 \tag{4.10}$$

Здесь и далее индекс "M"означает величины, вычисленные в пространстве-времени Минковского. Принимая во внимание определение скалярного произведения (1.6) и соотношения (4.6), получаем

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{M}}, \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0.\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1) = (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0.\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{M}} \tag{4.11}$$

Условие $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$eqv$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в терминах величин Минковского имеет вид

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{M}} = \sqrt{\left(|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2_{\mathrm{M}} + 2\lambda_0^2\right)\left(|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2_{\mathrm{M}} + 2\lambda_0^2\right)} \tag{4.12}$$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2_{\mathrm{M}} = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2_{\mathrm{M}} \tag{4.13}$$

Используя для $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{M}}$ и $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2_{\mathrm{M}}$ традиционное выражение в терминах координат, получаем с помощью (4.5) вместо (4.12) и (4.13)

$$s(s+\alpha_0) = s^2 + 2\lambda_0^2 \tag{4.14}$$

$$s^2 = (s+\alpha_0)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 \tag{4.15}$$

Решение этих уравнений дает

$$\alpha_0 = \frac{2\lambda_0^2}{s}, \qquad \gamma_k = 2\lambda_0\sqrt{1+\frac{\lambda_0^2}{s^2}}\frac{q_k}{q}, \qquad k = 1,2,3 \tag{4.16}$$

где q_1, q_2, q_3 суть произвольные вещественные постоянные и

$$q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{4.17}$$

Таким образом, координаты точки Q_1

$$Q_1 = \left\{s + a + \frac{2\lambda_0^2}{s}, b + 2\lambda_0\sqrt{1+\frac{\lambda_0^2}{s^2}}\frac{q_1}{q}, 2\lambda_0\sqrt{1+\frac{\lambda_0^2}{s^2}}\frac{q_2}{q}, 2\lambda_0\sqrt{1+\frac{\lambda_0^2}{s^2}}\frac{q_3}{q}\right\} \tag{4.18}$$

В случае, когда $\lambda_0 \ll |s|$

$$Q_1 \approx \left\{s + a + \frac{2\lambda_0^2}{s}, b + \frac{2\lambda_0 q_1}{q}, \frac{2\lambda_0 q_2}{q}, \frac{2\lambda_0 q_3}{q}\right\} \tag{4.19}$$

Поправка к координате x^0, обусловленная дисторсией, имеет порядок λ_0^2, тогда как поправка к другим координатам имеет порядок λ_0. Таким образом, вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ многовариантен, и его многовариантность описывается двумя произвольными параметрами.

Второй случай более интересен с физической точки зрения, потому что он может рассматриваться как описание временной эволюции геометрического объекта, описываемого двумя характерными точками P_0 и P_1, разделенными времениподобным интервалом. Во втором случае, когда $P_1 = Q_0$, имеем $a = s$, $b = 0$, т.е.

$$P_0 = \{0,0,0,0\}, \qquad Q_0 = P_1 = \{s,0,0,0\}, \qquad Q_1 = \{2s+\alpha_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \tag{4.20}$$

Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ имеют тот же самый вид (4.5), однако, в этом случае соотношение между $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ и $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{E}}$ имеет вид

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{M}} - \lambda_0^2, \tag{4.21}$$

который отличается от соотношения (4.11).

Условие $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в терминах величин Минковского имеет вид

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0|^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2_{\mathrm{M}} + 2\lambda_0^2, \qquad |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_0|^2 = |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_0|^2_{\mathrm{M}} = 0 \tag{4.22}$$

$$|\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1|^2 = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2 = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2_{\mathrm{M}} + 2\lambda_0^2 \tag{4.23}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{M}} - \lambda_0^2 = \sqrt{\left(|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2_{\mathrm{M}} + 2\lambda_0^2\right)\left(|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2_{\mathrm{M}} + 2\lambda_0^2\right)} \tag{4.24}$$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2_{\mathrm{M}} = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2_{\mathrm{M}} \tag{4.25}$$

Они принимают вид

$$s\,(s+\alpha_0) - \lambda_0^2 = s^2 + 2\lambda_0^2 \tag{4.26}$$

$$s^2 = (s+\alpha_0)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 \tag{4.27}$$

и отличаются от соотношений (4.14), (4.15) заменой величины λ_0 на $\sqrt{3/2}\lambda_0$.

Используя замену $a \to s$, $b \to 0$, $\lambda_0 \to \sqrt{3/2}\lambda_0$ в соотношениях (4.18), (4.19), получаем для вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 = \left\{s + \frac{3\lambda_0^2}{s}, \lambda_0\kappa\frac{q_1}{q}, \lambda_0\kappa\frac{q_2}{q}, \lambda_0\kappa\frac{q_3}{q}\right\} \tag{4.28}$$

где q_1, q_2, q_3 являются произвольными величинами

$$\kappa = \sqrt{6\left(1 + \frac{3\lambda_0^2}{2s^2}\right)} \tag{4.29}$$

и q определяется соотношением (4.17).

В случае, когда $\lambda_0 \ll |s|$

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 \approx \left\{s + \frac{3\lambda_0^2}{s}, \frac{\sqrt{6}\lambda_0 q_1}{q}, \frac{\sqrt{6}\lambda_0 q_2}{q}, \frac{\sqrt{6}\lambda_0 q_3}{q}\right\} \tag{4.30}$$

Другой предельный случай, когда $s \ll \lambda_0$. Положим $s = \beta\lambda_0$, $\beta \ll 1$ и получим

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 = \left\{\lambda_0\left(\beta + \frac{3}{\beta}\right), \lambda_0\kappa_1\frac{q_1}{q}, \lambda_0\kappa_1\frac{q_2}{q}, \lambda\kappa_1\frac{q_3}{q}\right\} \tag{4.31}$$

где

$$\kappa_1 = \sqrt{6\left(1 + \frac{3}{2\beta^2}\right)} \tag{4.32}$$

В этом случае все коэффициенты $\alpha_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ являются величинами одного порядка $3\lambda_0/\beta$, и многовариантность вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1$ очень велика. Получаем для $|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2$

$$|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2 = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2_{\mathrm{M}} + 2\lambda_0^2 = \left(2 + \beta^2\right)\lambda_0^2 \tag{4.33}$$

5 Эквивалентность двух изотропных векторов

Рассмотрим два эквивалентных изотропных вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в пространстве-времени (4.1) $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = 0$, $|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| = 0$. Мы рассматриваем случай, когда точка P_1 и Q_0 совпадают $P_1 = Q_0$. Тогда

$$P_0 = \{0,0,0,0\}, \qquad P_1 = \{s,s,0,0\}, \tag{5.1}$$

$$Q_0 = \{s,s,0,0\}, \qquad Q_1 = \{2s+\alpha_0, 2s+\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}, \tag{5.2a}$$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{s,s,0,0\}, \qquad \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 = \{s+\alpha_0, s+\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \tag{5.3}$$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 = \{2s+\alpha_0, 2s+\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \tag{5.4}$$

В этом случае получаем

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1) = \sigma(P_0, Q_1) \tag{5.5}$$

Условия эквивалентности имеют вид

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2_{\mathrm{M}} = 0, \qquad |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_2|^2 = |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_2|^2_{\mathrm{M}} = 0 \tag{5.6}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_2) = \sigma(P_0, Q_2) - \sigma(P_1, Q_2) - \sigma(P_0, P_1) = \sigma(P_0, Q_2) = 0 \tag{5.7}$$

В терминах координат имеем

$$\sigma(P_0, Q_2) = \sigma_{\mathrm{M}}(P_0, Q_2) = (2s+\alpha_0)^2 - (2s+\gamma_1)^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 = 0 \tag{5.8}$$

$$(s+\alpha_0)^2 - (s+\gamma_1)^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^3 = 0 \tag{5.9}$$

Решения уравнений (5.8), (5.9) имеют вид

$$\alpha_0 = \gamma_1, \qquad \gamma_2 = \gamma_3 = 0$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_2 = \{s+\alpha_0, s+\alpha_0, 0, 0\}, \qquad \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_2 = \{2s+\alpha_0, 2s+\alpha_0, 0, 0\} \tag{5.10}$$

где α_0 – произвольное вещественное число.

6 Построение геометрических объектов в Т-геометрии

Геометрический объект $\mathcal{O} \subset \Omega$ представляет собой подмножество точек в точечном пространстве Ω. В Т-геометрии геометрический объект $\mathcal{O}$ описывается каркасно-оболочным методом [4]. Это означает, что всякий геометрический объект $\mathcal{O}$ рассматривается как множество объединений и пересечений элементарных геометрических объектов (ЭГО).

Конечное множество $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\} \subset \Omega$ параметров оболочной функции $f_{\mathcal{P}^n}$ представляет собой каркас элементарного геометрического объекта

(ЭГО) $\mathcal{E} \subset \Omega$. Множество $\mathcal{E} \subset \Omega$ точек, образующих ЭГО, называется оболочкой каркаса $\mathcal{P}^n$. В непрерывной обобщенной геометрии оболочка $\mathcal{E}$ обычно представляет собой непрерывное множество точек. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$

$$f_{\mathcal{P}^n}: \qquad \Omega \to \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

определяющая ЭГО, является функцией бегущей точки $R \in \Omega$ и параметров $\mathcal{P}^n \subset \Omega$. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$ предполагается алгебраической функцией от s аргументов $w = \{w_1, w_2, ...w_s\}$, $s = (n+2)(n+1)/2$. Каждый из аргументов $w_k = \sigma(Q_k, L_k)$ представляет собой мировую функцию σ от двух аргументов $Q_k, L_k \in \{R, \mathcal{P}^n\}$, или принадлежащих к каркасу $\mathcal{P}^n$, или совпадающих с бегущей точкой R. Таким образом, любой элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$ определяется его каркасом $\mathcal{P}^n$ и его оболочной функцией $f_{\mathcal{P}^n}$ как множество нулей оболочной функции

$$\mathcal{E} = \{R | f_{\mathcal{P}^n}(R) = 0\} \tag{6.2}$$

Характерными точками ЭГО являются точки его каркаса $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\}$. Простейшим примером ЭГО является отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ прямой линии (1.24) между точками P_0 и P_1. Он определяется соотношением

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{[P_0P_1]} &= \{R | f_{P_0P_1}(R) = 0\}, \\ f_{P_0P_1}(R) &= \sqrt{2\sigma(P_0, R)} + \sqrt{2\sigma(R, P_1)} - \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Другим примером является сфера $\mathcal{S}_{OQ}$, где O есть центр сферы, а Q есть некоторая точка на поверхности сферы. Сфера $\mathcal{S}_{P_0P_1}$ описывается соотношением

$$\mathcal{S}_{OQ} = \{R | g_{OQ}(R) = 0\}, \qquad g_{OQ}(R) = \sqrt{2\sigma(O, R)} - \sqrt{2\sigma(O, Q)} \tag{6.4}$$

Здесь точки O, Q образуют каркас сферы, тогда как функция g_{OQ} представляет собой оболочную функцию.

Третьим примером является круговой цилиндр $\mathcal{C}(P_0, P_1, Q)$ с точками P_0, P_1 на оси цилиндра и точкой Q на его поверхности. Цилиндр $\mathcal{C}(P_0, P_1, Q)$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(P_0, P_1, Q) &= \{R | f_{P_0P_1Q}(R) = 0\}, \\ f_{P_0P_1Q}(R) &= F_2(P_0, P_1, Q) - F_2(P_0, P_1, R) \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$F_2(P_0, P_1, Q) = \begin{vmatrix} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \\ (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \end{vmatrix} \tag{6.6}$$

Здесь $\sqrt{F_2(P_0, P_1, Q)}$ представляет собой площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{F_2(P_0, P_1, Q)}$ представляет собой площадь треугольника с вершинами в точках P_0, P_1, Q. Равенство $F_2(P_0, P_1, Q) = F_2(P_0, P_1, R)$ означает, что расстояние между точкой Q и осью, определяемой вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, равно расстоянию между точкой R и осью. Здесь точки P_0, P_1, Q образуют каркас цилиндра, тогда как функция $f_{P_0P_1Q}$ является оболочной функцией.

Определение. Два ЭГО $\mathcal{E}(\mathcal{P}^n)$ и $\mathcal{E}(\mathcal{Q}^n)$ эквивалентны, если их каркасы эквивалентны и их оболочные функции $f_{\mathcal{P}^n}$ и $g_{\mathcal{Q}^n}$ равны. Эквивалентность двух каркасов $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\} \subset \Omega$ и $\mathcal{Q}^n \equiv \{Q_0, Q_1, ..., Q_n\} \subset \Omega$ означает, что

$$\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k, \qquad i, k = 0, 1, ...n, \quad i < k \tag{6.7}$$

Эквивалентность оболочных функций $f_{\mathcal{P}^n}$ и $g_{\mathcal{Q}^n}$ означает, что

$$f_{\mathcal{P}^n}(R) = g_{\mathcal{P}^n}(R), \qquad \forall R \in \Omega \tag{6.8}$$

где Φ есть произвольная функция, обладающая свойством

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(0) = 0 \tag{6.9}$$

Эквивалентность формы двух ЭГО $\mathcal{E}(\mathcal{P}^n)$ и $\mathcal{E}(\mathcal{Q}^n)$ определяется эквивалентностью формы их каркасов $\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{Q}^n$, которая описывается соотношениями

$$|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k| = |\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k|, \qquad i, k = 0, 1, ...n, \quad i < k \tag{6.10}$$

и эквивалентностью их оболочных функций $f_{\mathcal{P}^n}$ и $g_{\mathcal{Q}^n}$ (6.8).

Эквивалентность ориентаций каркасов $\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{Q}^n$ в точечном пространстве Ω описывается соотношениями

$$\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k \upuparrows \mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k, \qquad i, k = 0, 1, ...n, \quad i < k \tag{6.11}$$

Эквивалентность формы и ориентации каркасов представляет собой эквивалентность каркасов, описываемую соотношениями (6.7).

Определение. Элементарный геометрический объект $\mathcal{E}(\mathcal{P}^n)$ существует, если в любой момент времени существует элементарный геометрический объект $\mathcal{E}'(\mathcal{P}'^n)$, эквивалентный ЭГО $\mathcal{E}(\mathcal{P}^n)$. При этом предполагается, что каркас $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ содержит точки, разделенные времениподобным интервалом. Предполагается, что вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ является времениподобным ($|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 > 0$). Предполагается, что элементарный геометрический объект $\mathcal{E}(\mathcal{P}^n) = \mathcal{E}(P_0, P_1, ..., P_n)$ находится в точке P_0. Тот же самый ЭГО, находящийся в точке P_1 имеет вид $\mathcal{E}(P_0', P_1', P_2'..., P_n')$ с $P_0' = P_1$. точки P_0 и $P_0' = P_1$ разделены времениподобным интервалом, и можно рассматривать ЭГО $\mathcal{E}(P_0', P_1', P_2'..., P_n')$ как результат временной эволюции ЭГО $\mathcal{E}(P_0, P_1, ..., P_n)$, при условии что эти геометрические объекты эквивалентны, т.е.

$$\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k \mathrm{eqv} \mathbf{P}_i'\mathbf{P}_k', \qquad i, k = 0, 1, ...n, \quad i < k \tag{6.12}$$

Таким образом, если ЭГО $\mathcal{E}\left(P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, ..., P_n^{(0)}\right), \mathcal{E}\left(P_0^{(1)}, P_1^{(1)}, ..., P_n^{(1)}\right), \mathcal{E}(P_0^{(2)}, P_1^{(2)}, ..., P_n^{(2)})$,... $\mathcal{E}(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, ..., P_n^{(k)})$,... попарно эквивалентны

$$\mathcal{E}\left(P_0^{(k-1)}, P_1^{(k-1)}, ..., P_n^{(k-1)}\right) \mathrm{eqv} \mathcal{E}\left(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, ..., P_n^{(k)}\right), \qquad k = 1, 2, ... \tag{6.13}$$

и

$$
\begin{aligned}
P_1^{(0)} &= P_0^{(1)}, \quad P_1^{(1)} = P_0^{(2)}, \quad P_1^{(2)} = P_0^{(3)}, ...P_1^{(k)} = P_0^{(k+1)}, ... \quad (6.14) \\
\left|\mathbf{P}_0^{(k)}\mathbf{P}_1^{(k)}\right|^2 &> 0, \qquad k = 1, 2, ... \quad (6.15)
\end{aligned}
$$

можно рассматривать существование множества элементарных геометрических объектов (ЭГО) $\mathcal{E}\left(P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, ..., P_n^{(0)}\right), \mathcal{E}\left(P_0^{(1)}, P_1^{(1)}, ..., P_n^{(1)}\right), \mathcal{E}\left(P_0^{(2)}, P_1^{(2)}, ..., P_n^{(2)}\right)$,... $\mathcal{E}\left(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, ..., P_n^{(k)}\right)$, со свойствами (6.13) - (6.15) как временнýю эволюцию ЭГО $\mathcal{E}\left(P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, ..., P_n^{(0)}\right)$.

Итак, геометрия пространства-времени определяет возможность существования геометрического объекта $\mathcal{E}(\mathcal{P}^n)$ и его временнóй эволюции. Некоторые геометрические объекты могут существовать, другие существовать не могут. Этот факт зависит от выполнения соотношения (6.13). Временная эволюция некоторых геометрических объектов может быть многовариантна. Временная эволюция других объектов может быть одновариантной. Возможны такие геометрические объекты, для которых нет эквивалентных геометрических объектов и не существует временной эволюции.

7 Временная эволюция времениподобного отрезка прямой

Времениподобный отрезок (6.3) прямой линии (1.24) является элементарным геометрическим объектом $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, описываемым каркасом, состоящим из двух точек P_0, P_1. Временная эволюция этого отрезка описывается ломаной трубкой $\mathcal{T}_{\rm br}$.

$$
\mathcal{T}_{\rm br} = \bigcup_i \mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}, \qquad \mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i \mathrm{eqv} \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}, \qquad |\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|^2 = \mu^2, \qquad i = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{7.1}
$$

Форма ломаной трубки $\mathcal{T}_{\rm br}$ в пространстве-времени (4.1) многовариантна. Она выглядит как цепь, состоящая из одинаковых звеньев $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$. В пространстве-времени Минковского форма трубки $\mathcal{T}_{\rm br}$ одновариантна, и цепь звеньев $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ вырождается во времениподобную прямую линию.

В инерциальной системе координат $\{ct, x^1, x^2, x^3\}$, где точки P_0, P_1 имеют координаты

$$
P_0 = \{0, 0, 0, 0\}, \qquad P_1 = \left\{\sqrt{\mu^2 - 2\lambda_0^2}, 0, 0, 0\right\}, \tag{7.2}
$$

и вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ имеет длину

$$
|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = \sqrt{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\rm M}^2 + 2\lambda_0^2} = \mu, \tag{7.3}
$$

поверхность $\mathcal{T}_{(P_0P_1)} = \mathcal{T}_{[P_0P_1]} \setminus \{P_0, P_1\}$ описывается следующим уравнением

$$r^2 = \mathbf{x}^2 = \frac{2\lambda_0^2\left(ct - \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 2\lambda_0^2}\right)^2}{\mu^2} + \frac{3}{2}\lambda_0^2, \qquad 0 < ct < \sqrt{\mu^2 - 2\lambda_0^2} \tag{7.4}$$

Точки каркаса P_0, P_1 не принадлежат поверхности (7.4), но они принадлежат к $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$. Поверхность представляет собой круговую трубку (7.4) с минимальным радиусом $r_{\min} = \sqrt{3/2}\lambda_0$ и максимальным радиусом $r_{\max} = \sqrt{2\lambda_0^2 - \frac{\lambda_0^4}{\mu^2}}$, $\mu > \sqrt{2}\lambda_0$. В пределе $\lambda_0 \to 0$ максимальный и минимальный радиусы стремятся к нулю, и трубка (7.4) вырождается в отрезок прямой линии.

Замечание. Форма оболочной функции не имеет значения для временной эволюции геометрического объекта, описываемого двумя точками P_0, P_1 каркаса. В частности, вместо ЭГО $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, можно рассмотреть сферу $\mathcal{S}_{P_0P_1}$, определяемую соотношением (6.4). В этом случае вместо ломаной трубки (7.1) получаем

$$\mathcal{T}_{\mathrm{br}} = \bigcup_i \mathcal{S}_{P_iP_{i+1}}, \qquad \mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i\mathrm{eqv}\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}, \qquad |\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|^2 = \mu^2, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{7.5}$$

Здесь вместо отрезка трубки (7.4), получаем гиперболу

$$r^2 = \mathbf{x}^2 = c^2t^2 - \mu^2 + 2\lambda_0^2 \tag{7.6}$$

Недостатком представления (7.5) является тот факт, что одна из точек каркаса (P_0) не принадлежит оболочке сферы $\mathcal{S}_{P_0P_1}$. В пределе $\lambda_0 \to 0$ множество гипербол (7.6) не ассоциируется с мировой линией частицы.

Взаимное расположение смежных звеньев $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ и $\mathcal{T}_{[P_1P_2]}$ описывается углом между векторам $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и вектором $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. Поскольку эти векторы эквивалентны и, следовательно, параллельны, этот угол $\theta = 0$, потому что

$$\cosh\theta = \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)}{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|} = 1 \tag{7.7}$$

Однако, поскольку

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}}^2 = |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|_{\mathrm{M}}^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 - 2\lambda_0^2, \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)_{\mathrm{M}} = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2) - \lambda_0^2 \tag{7.8}$$

угол θ_{M} между вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и вектором $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, измеренный на многообразии Минковского, определяется соотношением

$$\cosh\theta_{\mathrm{M}} = \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)_{\mathrm{M}}}{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}} \cdot |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|_{\mathrm{M}}} = \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2) - \lambda_0^2}{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 - 2\lambda_0^2} = \frac{\mu^2 - \lambda_0^2}{\mu^2 - 2\lambda_0^2} > 1 \tag{7.9}$$

случае, когда $\mu \gg \lambda_0$, из (7.9) следует, что

$$\theta_{\mathrm{M}} = \sqrt{2}\frac{\lambda_0}{\mu} \tag{7.10}$$

Таким образом, при фиксированном векторе $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ точка P_2, определяющая смежный вектор $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, лежит на поверхности конуса с углом θ_{M} при вершине P_1. Если $\lambda_0 \neq 0$, ломаная (7.1) многовариантна. Если $\lambda_0 \to 0$, то в соответствии с (7.10) $\theta_{\mathrm{M}} \to 0$, и конус вырождается в прямую линию. Ломаная трубка (7.1) вырождается в прямую линию, которая ассоциируется с мировой линией частицы. В пространстве-времени Минковского мировая линия является геометрической характеристикой частицы. Однако, кроме того частица имеет динамические характеристики: импульс $\mathbf{p}$ и массу m, которые не могут быть определены геометрически в пространстве-времени Минковского. Вектор импульса является касательным к мировой линии, и его направление может быть определено по форме мировой линии. Однако, его длина (масса частицы) не может быть определена геометрически. В пространстве-времени Минковского масса является динамической (негеометрической) характеристикой, ассоциирующейся с мировой линией частицы.

В искаженном пространстве-времени V_{d}, описываемом мировой функцией (4.1), масса частицы определяется геометрически как длина $|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}| = \mu$ звена ломаной трубки (7.1). В самом деле, в V_{d} звено $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ есть отрезок трубки радиуса r. Концы P_i и P_{i+1} этого отрезка могут быть определены геометрически. Если известны концы P_i, P_{i+1} отрезка $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$, то можно определить его длину $|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}| = \mu$. Однако, в этом случае масса μ определяется в единицах длины как расстояние между точками каркаса P_i, P_{i+1} отрезка $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$. Точки каркаса P_0, P_1 не принадлежат к поверхности (7.4), которая описывает интервал $\mathcal{T}_{(P_iP_{i+1})} = \mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]} \setminus \{P_0, P_1\}$. Обычно масса частицы выражается в единицах массы (г), и существует универсальный переводной коэффициент b, связывающий обычную массу m с геометрической массой μ

$$m = b\mu = b\left|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}\right|, \qquad [b] = \mathrm{g/cm} \tag{7.11}$$

Тот же самый коэффициент используется для связи геометрического вектора $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ с физическим 4-вектором импульса p_k

$$p_k = bc\left(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}\right)_k, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{7.12}$$

где c есть скорость света, и величины $\left(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}\right)_k$ являются координатами вектора $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ в некоторой системе координат.

Таким образом, принципиально динамика частицы является следствием геометрического описания. Однако, традиционный динамический формализм годится только для описания одновариантного движения. В этом смысле традиционная одновариантная динамика согласуется только с пространственно-временной геометрией Минковского, и не согласуется с мнговариантной геометрией искаженного пространства-времени V_{d}.

С точки зрения искаженной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ интервал $\mathcal{T}_{(P_0P_1)}$ описывает частицу, которая имеет форму полой сферы радиуса r $(r_{\min} < r < r_{\max})$. Такая сферическая частица существует в покое в системе координат K_0 в течение собственного времени t $(0 < t < \mu/c)$. В момент собственного времени $t = \mu/c$ сферическая частица вырождается в точечную частицу, находящуюся в точке $P_1 =$

$\{\mu, 0, 0, 0\}$. В следующий момент времени $t > \mu/c$ точечная частица превращается в сферическую частицу радиуса r, ($r_{\min} < r < r_{\max}$) и движется в случайном пространственном направлении со скоростью $|\mathbf{v}| = c \cdot \operatorname{arth}(\theta_{\mathrm{M}}) = c \cdot \operatorname{arth}\left(\sqrt{2}\frac{\lambda_0}{\mu}\right)$ в координатной системе K_0. Одновременно эта сферическая частица находится в покое в некоторой системе координат K_1, движущейся относительно системы координат K_0 со скоростью $\mathbf{v}$, ($|\mathbf{v}| = c \cdot \operatorname{arth}(\theta_{\mathrm{M}})$). Сферическая частица находится в покое в системе координат K_1 в течение собственного времени t, $\mu/c < t < 2\mu/c$. В момент собственного времени $t = 2\mu/c$ сферическая частица снова вырождается в точечную частицу в точке P_2 и т.д. Классическая механика не может описывать такие геометрические объекты без описания внутренних степеней свободы. Она не может также описывать преобразование сферической частицы в точечную и наоборот.

Существует проблема построения многовариантной динамики, которая согласовывалась бы с искаженной геометрией $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, описываемой мировой функцией (4.1). Чтобы описать многовариантное движение частицы, нужно рассмотреть все варианты движения одновременно и получить некоторое среднее описание (некоторые средние мировые линии частицы). Такое описание мы будем производить на многообразии Минковского, где результаты всех математических операций (равенство, суммирование, умножение, дифференцирование и т.д.) однозначно определены. Работая на многообразии Минковского и используя однозначные операции, определенные на этом многообразии, мы будем использовать геометрию и свойства геометрических объектов, определяемые мировой функцией (4.1).

Вообще говоря, классическая динамика имеет некоторый опыт работы с описанием многовариантного движения. В случае, когда имеются динамические уравнения для отдельной динамической системы, но имеются разные варианты начальных условий, движение оказывается многовариантным, из-за разных вариантов начальных условий. В этом случае используется статистический ансамбль, состоящий из многих одинаковых независимых динамических систем и рассматриваемый как динамическая система.

Например, свободная нерелятивистская частица описывается действием

$$\mathcal{A}[\mathbf{x}] = \int m \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 dt \tag{7.13}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ описывает мировую линию классической точечной частицы.

Статистический ансамбль свободных нерелятивистских частиц является динамической системой, которая описывается действием

$$\mathcal{A}[\mathbf{x}] = \int m \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 dt d\xi \tag{7.14}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi)$, $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ...\xi_n\}$. Независимые переменные ξ маркируют частицы статистического ансамбля. Функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi)$ при фиксированных ξ описывает мировую линию частицы, маркируемую меткой ξ. Число n переменных

ξ может быть произвольным, потому что неважно, как маркируются элементы статистического ансамбля. Однако, обычно число переменных ξ выбирают равным числу переменных $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, x^3\}$, для того, чтобы уравнения

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi) \tag{7.15}$$

можно было бы разрешить в виде $\xi = \xi(t, \mathbf{x})$ и использовать переменные $t, \mathbf{x}$ как независимые переменные (Эйлеровы координаты).

Действия (7.13) и (7.14) порождают одни и те же уравнения

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = 0 \tag{7.16}$$

Две динамические системы (7.13) и (7.14) различаются только тем, что динамическая система (7.14) осуществляет одновариантное описание, тогда как статистический ансамбль (7.13) осуществляет многовариантное описание, где начальные условия для разных элементов статистического ансамбля различны. Динамические уравнения (7.16) образую систему *обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Если движение отдельной частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ многовариантно (случайно), динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ перестают быть обыкновенными дифференциальными уравнениями. Они становятся уравнениями в частных производных. В этом случае нельзя получить динамические уравнения для отдельной частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, хотя динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ существуют.

Рассмотрим, например, действие вида

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int\int_{V_\xi} \left\{\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{m}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2}\nabla\mathbf{u}\right\} dt d\xi, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{7.17}$$

Зависимые переменные $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi)$ описывают регулярную составляющую движения частицы. Зависимые переменные $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ описывают среднее значение случайной составляющей скорости, $\hbar$ представляет собой квантовую постоянную. Оператор

$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\} \tag{7.18}$$

является оператором в пространстве координат $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, x^3\}$.

Чтобы получить функционал действия для отдельной частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ из действия (7.17) для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, следует опустить интегрирование по ξ в (7.17), как это следует из сравнения (7.13) и (7.14). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{st}}}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int \left\{\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{m}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2}\nabla\mathbf{u}\right\} dt, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{7.19}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ суть зависимые динамические переменные. Функционал действия (7.19) не является хорошо определенным (для $\hbar \neq 0$), потому что оператор ∇ определен в некоторой 3-мерной окрестности точки $\mathbf{x}$, а не в самой точке $\mathbf{x}$. Поскольку функционал действия (7.19) не является хорошо определенным, то нельзя получить динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. По определению это означает, что движение частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ является многовариантным (случайным). Полагая $\hbar=0$ в (7.19), преобразуем действие (7.19) в действие (7.13), потому что в этом случае $\mathbf{u}=0$ в силу динамических уравнений.

Вернемся к действию (7.17) и получим динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Варьирование действия (7.17) по $\mathbf{u}$ дает

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right] &= \int\int\limits_{V_\xi}\left\{m\mathbf{u}\delta\mathbf{u}-\frac{\hbar}{2}\nabla\delta\mathbf{u}\right\}dtd\xi \\
&= \int\int\limits_{V_\mathbf{x}}\left\{m\mathbf{u}\delta\mathbf{u}-\frac{\hbar}{2}\nabla\delta\mathbf{u}\right\}\frac{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}dtd\mathbf{x} \\
&= \int\int\limits_{V_\mathbf{x}}\delta\mathbf{u}\left\{m\mathbf{u}\rho+\frac{\hbar}{2}\nabla\rho\right\}dtd\mathbf{x}-\int\oint\frac{\hbar}{2}\rho\delta\mathbf{u}dtd\mathbf{S}
\end{aligned}$$

где

$$\rho=\frac{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}=\left(\frac{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}\right)^{-1} \tag{7.20}$$

Получаем следующее динамическое уравнение

$$m\rho\mathbf{u}+\frac{\hbar}{2}\nabla\rho=0, \tag{7.21}$$

Варьирование действия (7.17) по $\mathbf{x}$ дает

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=\nabla\left(\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\nabla\mathbf{u}\right) \tag{7.22}$$

Здесь d/dt означает субстанциональную производную по времени t

$$\frac{dF}{dt}\equiv\frac{\partial\left(F,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}$$

Разрешая (7.21) относительно $\mathbf{u}$, получаем уравнение

$$\mathbf{u}=-\frac{\hbar}{2m}\nabla\ln\rho, \tag{7.23}$$

которое напоминает выражение для средней скорости броуновской частицы с коэффициентом диффузии $D=\hbar/2m$.

Исключая скорость $\mathbf{u}$ из динамических уравнений (7.22), (7.23) и переходя к независимым эйлеровым переменным $t,\mathbf{x}$, получаем уравнения гидродинамического типа для среднего движения стохастической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=m\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\left(\mathbf{v}\nabla\right)\mathbf{v}\right)=-\nabla U_{\mathrm{B}},\qquad\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\left(\rho\mathbf{v}\right)=0 \tag{7.24}$$

где $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ и U_{B} есть потенциал Бома [6]

$$U_{\mathrm{B}} = U\left(\rho, \nabla\rho, \nabla^2\rho\right) = \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho^2} - \frac{\hbar^2}{4m}\frac{\nabla^2\rho}{\rho} \qquad (7.25)$$

В случае потенциального течения гидродинамические уравнения (7.24) эквивалентны уравнению Шредингера [6]. Таким образом, действие (7.17) и динамические уравнения (7.24) правильно описывают многовариантное движение частиц статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$. Однако, остается неясным, как вид действия (7.17) связан с многовариантной пространственно-временной геометрией. Этот вопрос исследуется в работе [5]. Показано, что для согласия пространственно-временной геометрии с действием (7.17) дисторсию $d = \lambda_0^2$ в мировой функции (1.3) следует выбрать в виде

$$d = \lambda_0^2 = \frac{\hbar}{2bc} \qquad (7.26)$$

где $\hbar$ есть квантовая постоянная, c есть скорость света, а b есть постоянная из соотношения (7.11), связывающего геометрическую массу μ с обычной массой m частицы.

Здесь мы предлагаем только некоторые простые соображения для объяснения связи мировой функции пространства-времени с действием (7.17), описывающим движение ансамбля свободных частиц.

Как следует из соотношения (7.10), скорость частицы, описываемая звеном $\mathcal{T}_{[P_1P_2]}$, имеет две составляющие. Одна составляющая $\mathbf{v}_{\mathrm{reg}} = \mathbf{p}/m$ регулярна. Она определяется импульсом частицы $\mathbf{p}$. Другая составляющая скорости $\mathbf{v}_{\mathrm{st}}$ обусловлена случайным блужданием частицы. Ее среднее значение $\langle\mathbf{v}_{\mathrm{st}}\rangle$ зависит от состояния всего ансамбля. Оно имеет вид

$$\langle\mathbf{v}_{\mathrm{st}}\rangle = -\alpha r_{\min} c\theta_{\mathrm{M}}\nabla\log\rho, \qquad r_{\min} = \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_0, \qquad \theta_{\mathrm{M}} = \sqrt{2}\frac{\lambda_0}{\mu} \qquad (7.27)$$

где α есть некоторое вещественное число порядка единицы и ρ есть плотность частиц в статистическом ансамбле.

С одной стороны, из действия (7.17), дающего правильное описание среднего движения частицы следует, что средняя скорость стохастического движения частицы может быть представлена в виде (7.23). С другой стороны, сравнение соотношений (7.27) и (7.23) приводит к результату (7.26). При этом важно, что постоянная b не появляется в действии (7.17), и нельзя экспериментально определить значение постоянной b так же как и значение постоянной $q = \lambda_0^2$. Таким образом, для объяснения квантовых эффектов важен факт многовариантности, а не ее численное значение.

8 Заключительные замечания

Неевклидов метод построения обобщенной геометрии позволяет построить все возможные обобщенные геометрии. Эти геометрии могут быть непрерывными или дискретными. Они могут иметь переменную размерность или, вообще, не иметь размерности. Неевклидов метод работает только с мировой функцией, которая является единственной существенной характеристикой геометрии. Неевклидов метод не использует координатного описания, и нет необходимости принимать во внимание и устранять произвольность, связанную с использованием координат.

Неевклидов метод не нуждается в разделении утверждений геометрии на аксиомы и теоремы. Ему не нужна проверка непротиворечивости аксиом, связанная с этим разделением. Неевклидов метод позволяет обнаружить свойство многовариантности, которое является важным общим свойством обобщенных геометрий. Многовариантность оказывается очень важным свойством пространственно-временной геометрии, ответственным за квантовые эффекты. Существование многовариантности предписывает новый пересмотр пространственно-временной геометрии. Многовариантность геометрии пространства-времени позволяет продвигаться по пути дальнейшей геометризации физики. Масса частицы оказывается геометрической характеристикой частицы. Становится возможным поставить вопрос о существовании геометрических объектов. В частности, становится возможным рассматривать проблему конфайнмента как геометрическую проблему существования сложного объекта (а не как динамическую проблему удержания точечных частиц в ограниченном объеме).

Список литературы

[1] J.L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960.

[2] Yu. A. Rylov, New crisis in geometry? *math.GM*/0503261.

[3] Yu. A. Rylov, Euclidean geometry as algorithm for construction of generalized geometries. *math.GM*/0511575

[4] Yu. A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. J. Math. Math. Sci.*, **30**, 733-760, (2002).

[5] Yu. A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).

[6] D. Bohm, On interpretation of quantum mechanics on the basis of the "hidden" variable conception. *Phys.Rev.* **85,** 166, 180, (1952).