Движение свободной частицы в дискретной геометрии пространства-времени

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
Россия 117526, Москва, Пр. Вернадского 01-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Рассматривается дискретная геометрия пространства-времени $\mathcal{G}_{\rm d}$, заданная на том множестве точек (событий), где задается геометрия Минковского. Эта дискретная геометрия не является геометрией на решетке. Рассматривается движение свободной частицы в $\mathcal{G}_{\rm d}$. Свободное движение в $\mathcal{G}_{\rm d}$ можно свести к движению в некотором силовом поле геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\rm M}$. Изначально свободное движение в $\mathcal{G}_{\rm d}$ оказывается стохастическим. В $\mathcal{G}_{\rm M}$ трудно описать силовое поле, ответственное за стохастическое движение частицы. Природа этого силового поля оказывается геометрической.

1 Введение

Более, чем сто лет тому назад Людвиг Больцман предложил метод описания недетерминированных частиц с помощью математического формализма газовой динамики. В то время только молекулы газа и броуновские частицы были известны как стохастические (недетерминированные) частицы. Квантовые частицы, которые тоже являются стохастическими частицами, в то время известны не были. Вначале научное сообщество не приняло исследования Больцмана. Но через некоторое время кинетическое уравнение Больцмана было принято как метод исследования свойств газа. Однако, исследования Больцмана не были приняты как метод описания стохастических частиц.

По-видимому, причиной такого непризнания было то, что метод Больцмана не мог описывать квантовые частицы. Более точно, описывать квантовые частицы методом Больцмана не умели. Связь между газовой динамикой и квантовой механикой была известна, но она была односторонней. Можно было получить газовую динамику из квантовой механики [1], но получить квантовую механику из газовой динамики не умели.

Однако, оказалось, что *классическая газовая динамика может рассматриваться как метод описания стохастических частиц.* В самом деле, молекула газа движется стохастически из-за взаимодействия с другими молекулами газа. Это взаимодействие проявляется в столкновениях молекул. Если столкновений нет, молекулы газа движутся детерминировано. Характер стохастичности зависит от вида молекулярного взаимодействия. Оказывается, что можно ввести такое молекулярное взаимодействие, что потенциальное течение газа будет описываться уравнением Клейна-Гордона. Это взаимодействие изменяет массу молекулы m, превращая ее в эффективную массу M с помощью соотношения

$$m^2 \to M^2(x) = m^2 + \frac{\hbar^2}{c^2}\left(g_{kl}\kappa^k\kappa^l + \partial_l\kappa^l\right), \quad \partial_l \equiv \frac{\partial}{\partial x^l} \tag{1.1}$$

где κ^l, $l = 0, 1, 2, 3$ есть некоторое силовое поле и $\hbar$ есть квантовая постоянная. Динамические уравнения для κ-поля получаются из соответствующего функционала действия. Из этих динамических уравнений следует, что κ-поле имеет потенциал κ

$$\kappa_l = g_{lk}\kappa^k = \partial_l\kappa, \quad l = 0, 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

Газ, чьи молекулы взаимодействуют через κ-поле (1.1), описывается действием [2]

$$\mathcal{E}[S_{\mathrm{st}}]: \quad \mathcal{A}[x, \kappa] = \int_{\xi_0}\int_{V_\xi}\left(-mcK\sqrt{g_{lk}\dot{x}^l\dot{x}^k} - \frac{e}{c}A_l\dot{x}^l\right)d^4\xi, \quad \dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial\xi_0} \tag{1.3}$$

$$K = \frac{M}{m} = \sqrt{1 + \lambda^2\left(\kappa_l\kappa^l + \partial_l\kappa^l\right)}, \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc}, \quad \partial_l \equiv \frac{\partial}{\partial x^l} \tag{1.4}$$

где $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$. Переменные $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_2\}$ маркируют мировые линии молекул, тогда как ξ_0 является параметром, изменяющимся вдоль мировой линии. Движение молекул газа является стохастическим. В самом деле, действие для отдельной газовой молекулы записывается в виде (интегрирование по $\boldsymbol{\xi}$ опущено)

$$S_{\mathrm{st}}: \quad \mathcal{A}[x, \kappa] = \int_{\xi_0}\left(-mcK\sqrt{g_{lk}\dot{x}^l\dot{x}^k} - \frac{e}{c}A_l\dot{x}^l\right)d\xi_0 \quad \dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial\xi_0}, \tag{1.5}$$

Если K определяется соотношением (1.4) и κ^l не обращается в нуль, действие (1.5) определено некорректно, потому что $x^k = x^k(\xi_0)$ в (1.5) является одномерной линией, тогда как производные от κ^l в K определены во всем пространстве-времени.

Для отождествления уравнений газовой динамики с уравнениями квантовой механики очень важно то, что волновая функция является естественным атрибутом механики сплошной среды [3]. Только зная это, можно получить уравнение Клейна-Гордона, записанное в терминах волновой функции ψ, из уравнений классической газовой динамики, записанных в терминах гидродинамических переменных ρ,$\mathbf{v}$. Существует три возможных представления газовой динамики: (1) лагранжево представление, (2) представление Эйлера и (3) представление в терминах волновой функции. Последнее представление не было известно в двадцатом веке.

Кроме того, уравнения классической газовой динамики так же как уравнение Клейна-Гордона описывают только среднюю скорость и среднюю энергию стохастической частицы. Они не могут описывать распределение по скоростям (например, распределение Максвелла). Однако, уравнения газовой динамики могут быть распространены на случай кинетического уравнения, которое описывает эволюцию распределения по скоростям. Для квантового уравнения такое обобщение до сих пор не получено, хотя такое обобщение должно существовать, если квантовое уравнение рассматривается как уравнение газовой динамики. Больцман получил кинетическое уравнение, анализируя элементарный акт столкновения молекул газа. Следует ожидать, что, анализируя взаимодействие (1.1), будет можно получить более полную информацию о движении квантовой частицы.

В этой работе мы попытаемся сделать предварительный шаг для анализа κ-поля, определенного соотношением (1.1). Этим предварительным шагом является исследование движения свободной частицы в дискретной геометрии пространства-времени. Дело в том, что свободное движение частицы в некотором экзотическом пространстве-времени может быть эквивалентно движению в некотором силовом поле пространства-времени Минковского. Например, движение заряженной частицы в заданных электромагнитном и гравитационном полях может быть описано как свободное движение этой частицы в 4-мерной геометрии Калуцы-Клейна. Вообще, граница между динамикой и геометрией пространства-времени подвижна, и можно преобразовывать динамику в геометрию пространства-времени и наоборот. Возможности геометрии пространства-времени более эффективны, чем возможности динамики, и мы будем использовать это обстоятельство при исследовании κ-поля, определенного соотношением (1.1).

2 Дискретная геометрия пространства-времени

Все обобщенные геометрии $\mathcal{G}$ являются модификациями собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. По определению дискретной геометрией $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ является такая геометрия, где все расстояния больше, чем некоторая минимальная длина λ_0. Нулевая длина тоже возможна, например, межу двумя совпадающими точками. Математически это означает, что

$$\mathcal{G}_{\mathrm{d}}: \quad |\rho_{\mathrm{d}}(P,Q)| \notin (0,\lambda_0), \ \forall P,Q \in \Omega \tag{2.1}$$

где $\rho_{\mathrm{d}}(P,Q)$ есть расстояние между точками P и Q в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Ω есть множество точек, где задана дискретная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$.

Обычно условие (2.1) рассматривается как ограничение на множество Ω точек, где задана дискретная геометрия. Тогда это ограничение приводит к множеству Ω, содержащему счетное число точек. Такая геометрия известна как геометрия на решетке (geometry on a lattice). Метрика ρ (расстояние) рассматривается как расстояние в геометрии Минковского. Геометрия на решетке не имеет почти ничего общего с геометрией пространства-времени. В частности нельзя построить мировые линии частиц в геометрии пространства-времени на решетке. Непонятно, как можно построить линию для частиц на решетке.

Мы будем рассматривать условие (2.1) как ограничение на метрику ρ_{d}, тогда как множество Ω есть множество Ω_{M}, где задается геометрия Минковского. Метрика ρ_{d} выбирается таким образом, чтобы выполнялось ограничение (2.1). По техническим причинам более удобно использовать мировую функцию $\sigma_{\mathrm{d}} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{d}}^2$. Мировая функция σ_{d} может быть выбрана в виде

$$\sigma_{\mathrm{d}}(P,Q) = \sigma_{\mathrm{M}}(P,Q) + \frac{\lambda_0^2}{2}\mathrm{sgn}\left(\sigma_{\mathrm{M}}(P,Q)\right) \tag{2.2}$$

где σ_{M} есть мировая функция геометрии Минковского. Легко проверить, что σ_{d} из (2.2) удовлетворяет ограничению (2.1). В то же время дискретная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, описываемая мировой функцией σ_{d} является однородной и изотропной, потому что σ_{d} является функцией от σ_{M}, которая является однородной и изотропной. Такое представление дискретной геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ позволяет привести движение свободной частицы в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ к движению частицы в геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ с некоторым силовым полем. Это возможно, потому что мировые линии строятся из точек множества $\Omega = \Omega_{\mathrm{M}}$.

Заметим, что обычно исследователи воспринимают однородную и изотропную дискретную геометрию пространства-времени как нечто невозможное, потому что дискретная геометрия воспринимается обычно как геометрия на решетке.

Имеется только одна величина, которая является общей для евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Это расстояние или мировая функция. Чтобы получить дискретную геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ как модификацию собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, нужно представить евклидову геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ в монистическом представлении, когда все утверждения евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ выражаются через мировую функцию σ_{E} геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и только через σ_{E}. Это возможно [4], и мы покажем как это сделать.

Пусть евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ описывается в терминах мировой функции σ_{E}. Вектор $\mathbf{PQ} = \{P, Q\}$ есть упорядоченное множество из двух точек $P, Q \in \Omega$, где Ω есть множество тоек, где задана геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Векторы определяются их длиной и взаимным расположением. Длина $|\mathbf{PQ}|$ вектора $\mathbf{PQ}$ описывается соотношением

$$|\mathbf{PQ}| = \sqrt{2\sigma_{\mathrm{E}}(P,Q)} \tag{2.3}$$

Взаимная ориентация двух векторов $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{RS}$ описывается их скалярным произведением $(\mathbf{PQ}.\mathbf{RS})_{\mathrm{E}}$. В терминах мировой функции σ_{E} скалярное произведение выражается соотношением

$$(\mathbf{PQ}.\mathbf{RS})_{\mathrm{E}} = \sigma_{\mathrm{E}}(P,S) + \sigma_{\mathrm{E}}(Q,R) - \sigma_{\mathrm{E}}(P,R) - \sigma_{\mathrm{E}}(Q,S) \tag{2.4}$$

Угол φ между двумя векторами $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{RS}$ описывается соотношениями

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{PQ}.\mathbf{RS})_{\mathrm{E}}}{|\mathbf{PQ}|\,|\mathbf{RS}|} \tag{2.5}$$

Два вектора $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{RS}$ эквивалентны (равны ($\mathbf{PQ}\mathrm{eqv}\mathbf{RS}$)), если вектор параллельны ($\varphi = 0$) и длины их равны. В силу (2.4) и (2.5) равенство векторов $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{RS}$ может быть выражено через мировую функцию σ_{E}

$$(\mathbf{PQ}\mathrm{eqv}\mathbf{RS}): \quad (\mathbf{PQ}.\mathbf{RS})_{\mathrm{E}} = |\mathbf{PQ}|\cdot|\mathbf{RS}| \wedge |\mathbf{PQ}| = |\mathbf{RS}| \tag{2.6}$$

Имеется еще одно свойство векторов, которое определяется через их взаимное расположение. Это свойство линейной зависимости n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$,...$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$. Обычно линейная зависимость векторов определяется с помощью линейных операций над векторами. n векторов $\mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$,...$\mathbf{u}_n = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ линейно зависимы, если существует такое множество вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$, что

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \mathbf{u}_i = 0 \tag{2.7}$$

и не все $\alpha_i = 0$.

Хотя обычно используется именно это определение линейной зависимости, оно неудачно, потому что (1) оно неконструктивно и (2) оно требует использования линейных операций над векторами. В самом деле, чтобы проверить верно ли соотношение (2.7) нужно рассмотреть все возможности выбора множества $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$. Это не конструктивно. Зачем нужны линейные операции для определения линейной зависимости, если его можно определить без использования линейных операций. Вообще, векторы u_i линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$, где определены линейные операции над векторами, являются другими объектами, которые отличаются от векторов, определенных двумя точками $\mathbf{PQ} = \{P, Q\}$. Мы будем различать вектор $\mathbf{PQ} = \{P, Q\}$ от вектора $u_i \in \mathcal{L}_n$, который является объектом линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$. Мы будем называть вектор u_i линейным вектором или линвектором [6]. Вектор $\mathbf{PQ} = \{P, Q\}$ мы будем называть геометрическим вектором (g-вектором). В евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ g-вектор $\mathbf{PQ} = \{P, Q\}$ может быть отождествлен с линвектором $u_i \in \mathcal{L}_n$. Однако в обобщенной геометрии $\mathcal{G}$, которая получается в результате деформации геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, линейное векторное пространство $\mathcal{L}_n$, вообще говоря, не может быть введено. В этом случае следует различать между g-векторами и линвекторами.

Определение. n g-векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$,...$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ являются линейно зависимыми, если и только если определитель Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) = 0 \tag{2.8}$$

где $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)||, \quad i, k = 1, 2, ...n \tag{2.9}$$

Определение (2.8) является конструктивным, и оно использует только информацию о взаимном расположении векторов. В $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ оба определения (2.7) и (2.8) эквивалентны, но в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ можно использовать только определение (2.8). Это довольно неожиданно, что можно говорить о линейной зависимости g-векторов независимо от существования линейного векторного пространства L_n, где определены операции над векторами.

Наиболее неожиданным является определение размерности геометрии. В римановой (и евклидовой) геометрии размерность (метрическая размерность/ вводится как независимая базовая величина: "Рассмотрим многообразие размерности n с гладкой системой координат на нем..." Другими словами, метрическая размерность геометрии определяется до построения геометрии. При таком подходе не очень ясно, как ввести размерность в дискретной геометрии (2.2).

Замечание. Вообще, метрическая размерность n_{m} есть максимальное число линейно независимых g-векторов в геометрии $\mathcal{G}$. Координатная размерность n_{c} есть число координат, которое используется для описания геометрии $\mathcal{G}$. Вообще, n_{m} и n_{c} суть разные величины. Однако в евклидовой геометрии и в римановой геометрии эти размерности совпадают при традиционном описании, и обычно не различают между n_{m} и n_{c}.

В евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ размерность n может быть определена как максимальное число линейно независимых векторов в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Если $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ имеет размерность n, то существуют такие $n+1$ точек $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$, что

$$\exists\mathcal{P}^n : \quad F_n\left(\mathcal{P}^n\right) \neq 0, \quad \forall\mathcal{P}^{n+k}, k \geq 1, \quad F_{n+k}\left(\mathcal{P}^{n+k}\right) = 0 \tag{2.10}$$

Для евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ ограничения (2.10) на мировую функцию σ_{E} выполняются. Для дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ с мировой функцией σ_{d} определенной соотношением (2.2) ограничения (2.10) не выполняются, и нельзя ввести метрическую размерность n_{m} для $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Однако, описывая дискретную геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, мы будем использовать четырехмерное описание в том смысле, что будем использовать четыре координаты для описания $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, и $n_{\mathrm{c}} = 4$.

Ограничения (2.10) означают,что метрическая размерность зависит от свойств мировой функции σ рассматриваемой геометрии. Имеются геометрии пространства-времени без определенной размерности. Число пространственно-временных геометрий без размерности много больше, чем число геометрий с определенной размерностью (римановых геометрий).

Этот факт имеет существенные последствия. Построение общей теории относительности должно принимать во внимание все возможные геометрии пространства-времени, а не только те, которые имеют определенную метрическую размерность. Если учесть все возможные геометрии пространства-времени, то получается расширенная общая теория относительности, где невозможно существование черных дыр [8] и появляется индуцированная антигравитация [9], хотя она отсутствует в традиционной общей теории относительности.

3 Движение частицы в дискретной геометрии пространства-времени

Гладкие мировые линии частиц не возможны в дискретной геометрии пространства-времени. Мировые линии описываются как ломаные линии $\mathcal{L}_{\mathrm{br}}$. Звенья мировой линии представляют собой отрезки $T_{[P_i P i+1]}$ прямой линии

$$\mathcal{L}_{\mathrm{br}} = \bigcup_s \mathcal{T}_{[P_s P_{s+1}]} \tag{3.1}$$

где отрезки $T_{[P_S P s+1]}$ прямой линии определяются соотношением

$$T_{[P_s P s+1]} = \left\{ R | \sqrt{2\sigma\left(P_s, R\right)} + \sqrt{2\sigma\left(P_{s+1}, R\right)} - \sqrt{2\sigma\left(P_s, P_{s+1}\right)} = 0 \right\} \tag{3.2}$$

Это определение отрезка прямой линии одно и то же в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Но в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ $\sigma = \sigma_{\mathrm{E}}$, тогда как в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ $\sigma = \sigma_{\mathrm{d}}$. Кроме того, в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ длина звена $\mu = |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}|$ может быть устремлена к нулю, тогда как в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ длина звена $\mu = |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}| \geq \lambda_0$. Таким образом в дискретной геометрии пространства-времени появляется дополнительный параметр мировой линии. Длина звена $\mu = |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}|$ является дополнительным параметром мировой линии, который называется геометрической массой, потому что масса m реальной частицы связана с μ соотношением

$$m = b\mu \tag{3.3}$$

где b есть некоторая универсальная постоянная.

Таким образом, в дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ масса частицы является с необходимостью геометрической величиной. В геометрии Минковского, где мировая линия является гладкой линией, масса m может рассматриваться как негеометрическая (динамическая) величина.

Смежные g-векторы $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$ и $\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}$ мировой линии свободной частицы равны. Математически это означает, что

$$|\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}| = |\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}|, \quad s = ...0, 1, ... \tag{3.4}$$

$$(\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}.\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}) = |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}| \cdot |\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}|, \quad s = ...0, 1, ... \tag{3.5}$$

Используя для $|\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}|$ и для $(\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}.\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2})$ выражения (2.3) и (2.6), можно переписать (3.4) и (3.5) в виде

$$\sigma_{\mathrm{d}}(P_s, P_{s+1}) = \sigma_{\mathrm{d}}(P_{s+1}, P_{s+2}) \tag{3.6}$$

$$\sigma_{\mathrm{d}}(P_s, P_{s+2}) + \sigma_{\mathrm{d}}(P_{s+1}, P_{s+1}) - \sigma_{\mathrm{d}}(P_s, P_{s+1}) - \sigma_{\mathrm{d}}(P_{s+1}, P_{s+2}) = 2\sigma_{\mathrm{d}}(P_s, P_{s+1}) \tag{3.7}$$

С помощью (3.6) и $\sigma_{\mathrm{d}}(P_{s+1}, P_{s+1}) = 0$ уравнение (3.7) может быть переписано в виде

$$\sigma_{\mathrm{d}}(P_s, P_{s+2}) = 4\sigma_{\mathrm{d}}(P_s, P_{s+1}) \tag{3.8}$$

Два уравнения (3.6) и (3.8) описывают мировую линию свободной частицы дискретной геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$.

Такое бескоординатное описание мировой линии кажется несколько необычным. Чтобы прояснить ситуацию, мы рассмотрим сначала бескоординатное описание мировой линии свободной частицы в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Мы получаем два уравнения

$$\sigma_{\mathrm{M}}(P_s, P_{s+1}) = \sigma_{\mathrm{M}}(P_{s+1}, P_{s+2}) \tag{3.9}$$

$$\sigma_{\mathrm{M}}(P_s, P_{s+2}) = 4\sigma_{\mathrm{M}}(P_s, P_{s+1}) \tag{3.10a}$$

которые описывают мировую линию свободной частицы в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Не совсем ясно, как два уравнения (3.9) и (3.10a) описывают мировую линию, которая описывается обычно четырьмя пространственно-временными координатами.

Пусть координаты точек P_s, P_{s+1}, P_{s+2} имеют вид

$$P_s = \left\{x^0, \mathbf{x}\right\}, \quad P_{s+1} = \left\{x^0 + p^0, \mathbf{x} + \mathbf{p}\right\}, \quad P_{s+2} = \left\{x^0 + 2p^0 + \alpha^0, \mathbf{x} + 2\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}\right\} \tag{3.11}$$

Величины $x^0, \mathbf{x}, p^0, \mathbf{p}$ известны. Нужно определить $\alpha^0, \boldsymbol{\alpha}$ из двух уравнений (3.9), (3.10a). В координатном виде два уравнения (3.9), (3.10a) выглядят следующим образом

$$\frac{1}{2}\left(\left(p^0\right)^2-\mathbf{p}^2\right)=\frac{1}{2}\left(\left(p^0+\alpha^0\right)^2-(\mathbf{p}+\boldsymbol{\alpha})^2\right) \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(2p^0+\alpha^0\right)^2-(2\mathbf{p}+\boldsymbol{\alpha})^2\right)=2\left(\left(p^0\right)^2-\mathbf{p}^2\right) \tag{3.13}$$

Разрешая (3.12) относительно α^0, получаем

$$\alpha^0=-p^0\pm\sqrt{\left(p^0\right)^2+2\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}^2} \tag{3.14}$$

Подставляя (3.14) (3.13), получаем уравнение для определения $\boldsymbol{\alpha}$

$$\left(\left(p^0\pm\sqrt{\left(p^0\right)^2+2\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}^2}\right)^2-(2\mathbf{p}+\boldsymbol{\alpha})^2\right)=4\left(\left(p^0\right)^2-\mathbf{p}^2\right) \tag{3.15}$$

После упрощений оно принимает вид

$$\pm p^0\sqrt{\left(p^0\right)^2+2\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}^2}-\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}=\left(p^0\right)^2 \tag{3.16}$$

Устраняя радикал из (3.16), получаем после урощений

$$\left(p^0\right)^2\left(\boldsymbol{\alpha}^2\right)=(\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha})^2=\mathbf{p}^2\boldsymbol{\alpha}^2\cos^2\varphi \tag{3.17}$$

где φ есть угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\alpha}$. Выражение

$$\boldsymbol{\alpha}=\left\{\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3\right\}=0 \tag{3.18}$$

является решением уравнения (3.17)

Если мировая линия временИподобна, и $\left(p^0\right)^2>\mathbf{p}^2$, то (3.18) есть единственное решение уравнения (3.17). Если мировая линия пространственноподобна и $\left(p^0\right)^2<\mathbf{p}^2$, то имеются другие решения, когда $\cos^2\varphi=\left(p^0\right)^2/\mathbf{p}^2<1$. В современной физике рассматриватся только тардионы (частицы с времениподобной мировой линией). Предполагается, что тахионы (частицы с пространственноподобной мировой линий) не существуют. Описание тахионов можно найти в [5]

Подставляя (3.18) в (3.14), получаем $\alpha^0=0$, или $\alpha^0=-2p^0$. Значение $\alpha^0=-2p^0$ (нижний знак у радикала) не удовлетворяет изначальному уравнению (3.15). Таким образом, для тардионов получаем единственное решение $\alpha=\left\{\alpha^0,\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3\right\}=0$, и $\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}=\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}=\left\{p^0,\mathbf{p}\right\}$. В результате векторы ломаной линии $\mathcal{L}_{\mathrm{br}}$ образуют прямую линию.

Вернемся к рассмотрению уравнений (3.6) и (3.8). Если мировая линия времениподобна ($\sigma_{\mathrm{d}}>0$), то используя для σ_{d} выражение (2.2), можно записать уравнения (3.6) и (3.8) в виде

$$\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_s,P_{s+1}\right)=\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_{s+1},P_{s+2}\right) \tag{3.19}$$

$$\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_s,P_{s+2}\right)=4\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_s,P_{s+1}\right)+3\lambda_0^2 \tag{3.20}$$

Уравнения (3.19) и (3.20) описывают ломаную мировую линию в геометрии Минковского. Но они не описывают мировую линию свободной частицы. Они описывают мировую линию частицы, движущейся в геометрии Минковского в некотором силовом поле, описываемом членом $3\lambda_0^2$ в (3.20).

Таким образом, свободное движение в дискретном пространстве-времени приводится к движению в некотором силовом поле в пространстве-времени Минковского. Вообще, бескоординатное описание мировой линии в физической геометрии пространства-времени $\mathcal{G}$ при помощи мировой функции σ позволяет привести это описание к описанию в геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. При таком преобразовании свободное движение в $\mathcal{G}$ приводится к движению в некотором силовом поле в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Для такого преобразования достаточно представить мировую функция σ в виде

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{M}} + w \tag{3.21}$$

где σ_{M} есть мировая функция геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ и член w порождает силовое поле в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Такое преобразование удобно в том отношении, что оно не требует преобразования координат, которое существенно при работе с римановой геометрией. Мы рассмотрим пример с дискретной геометрией пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, где $w = \frac{\lambda_0^2}{2}\mathrm{sgn}\left(\sigma_{\mathrm{M}}\right)$.

4 Динамические уравнения для для свободного движения частицы в дискретной геометрии пространства-времени

Мы будем рассматривать простейшую версию дискретной геометрии пространства-времени (2.2), где λ_0 есть постоянная. Если $\lambda_0 = \lambda_0\left(\sigma_{\mathrm{M}}\right)$, то геометрия пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ тоже дискретна. Кроме того она однородна и изотропна. В случае, когда λ_0 есть функция пространственно-временных точек, $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ тоже дискретна, но в этом случае $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ не является однородной и изотропной.

Мы будем рассматривать простейший случай, когда $\lambda_0 =$const. Кроме того, мы будем рассматривать случай трехмерного пространства-времени, чтобы уменьшить громоздкость расчетов. Для простоты положено, что скорость света $c = 1$.

Пусть точки P_s, P_{s+1}, P_{s+2} ломаной линии имеют координаты (3.11). Тогда динамические уравнения (3.6) и (3.8) имеют вид

$$\left(p^0 + \alpha^0\right)^2 - \left(\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}\right)^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = \mu_0^2 \tag{4.1}$$

$$\left(2p^0 + \alpha^0\right)^2 - \left(2\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}\right)^2 = 4\left(p_0^2 - \mathbf{p}^2\right) + 3\lambda_0^2, \tag{4.2}$$

Взяв разность (4.2) и (4.1),получаем

$$2p^0\alpha^0 - 2\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha} = 3\lambda_0^2 \tag{4.3}$$

или

$$\alpha^0 = \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha} + \frac{3}{2}\lambda_0^2}{p^0} \tag{4.4}$$

Подставляя α^0 в (4.1), получаем после упрощений

$$\left(\frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}+\frac{3}{2}\lambda_0^2}{p^0}\right)^2+3\lambda_0^2-\boldsymbol{\alpha}^2=0 \tag{4.5}$$

или

$$\left(p_0^2\delta^{\alpha\beta}-p^\alpha p^\beta\right)\alpha^\alpha\alpha^\beta-3\lambda_0^2\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}=3p_0^2\lambda_0^2+\frac{9}{4}\lambda_0^4 \tag{4.6}$$

где суммирование производится по повторяющимся индексам (t,x,z). Уравнение (4.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&\left(p_0^2\delta^{\alpha\beta}-p^\alpha p^\beta\right)\left(\alpha^\alpha-q^\alpha\right)\left(\alpha^\beta-q^\beta\right)+2\left(p_0^2\delta^{\alpha\beta}-p^\alpha p^\beta\right)\alpha^\alpha q^\beta-3\lambda_0^2\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}\\ =\ &3p_0^2\lambda_0^2+\frac{9}{4}\lambda_0^4+\left(c^2p_0^2\delta^{\alpha\beta}-p^\alpha p^\beta\right)q^\alpha q^\beta\end{aligned} \tag{4.7}$$

где q^α есть произвольная величина. Положим

$$q^\alpha=\frac{3\lambda_0^2p^\alpha}{2\left(p_0^2-\mathbf{p}^2\right)}=\frac{3\lambda_0^2p^\alpha}{2\mu_0^2} \tag{4.8}$$

в (4.7). Получаем

$$\left(p_0^2\delta^{\alpha\beta}-p^\alpha p^\beta\right)\left(\alpha^\alpha-\frac{3\lambda_0^2p^\alpha}{2\mu_0^2}\right)\left(\alpha^\beta-\frac{3\lambda_0^2p^\alpha}{2\mu_0^2}\right)=3p_0^2\lambda_0^2+\frac{9}{4}\lambda_0^4+\mathbf{p}^2\left(\frac{\frac{9}{4}\lambda_0^4}{\mu_0^2}\right) \tag{4.9}$$

Решение уравнения (4.9) имеет вид

$$\boldsymbol{\alpha}_\parallel=\frac{\frac{3}{2}\lambda_0^2}{\mu_0^2}\mathbf{p}+\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\frac{r}{\mu_0}\cos\theta \tag{4.10}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_\perp=\mathbf{e}_3\frac{r}{p^0}\sin\theta \tag{4.11}$$

$$r^2=3\lambda_0^2p_0^2\left(1+\frac{3}{4}\frac{\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right),\quad \mu_0^2=\left(p^0\right)^2-\mathbf{p}^2 \tag{4.12}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_\parallel$ есть есть составляющая вектора $\boldsymbol{\alpha}$, параллельная вектору $\mathbf{p}$, тогда как $\boldsymbol{\alpha}_\perp$ есть составляющая вектора $\boldsymbol{\alpha}$, ортогональная к $\mathbf{p}$ ($\mathbf{e}_3\mathbf{p}=0$). Угол θ есть произвольная величина. Таким образом решение уравнения (4.9) не единственно даже для времениподобной мировой линии. Такой результат выглядит естественным, потому что мы имеем два уравнения для трех переменных α. Это означает, что мировая линия вихляет, и движение частицы в $\mathcal{G}_\mathrm{d}$ является стохастическим.

Введем скорость $u=\{u^0,\mathbf{u}\}$, определив ее соотношениями

$$u^0=\frac{cp_0+\alpha^0}{\mu}=\frac{cp_0}{\mu}\left(1+\frac{\frac{3}{2}\lambda_0^2}{\mu_0^2}+\frac{|\mathbf{p}|\,r}{\mu_0c^2p_0^2}\cos\theta\right) \tag{4.13}$$

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{p}+\boldsymbol{\alpha}}{\mu}=\mathbf{u}_\parallel+\mathbf{u}_\perp \tag{4.14}$$

$$\mathbf{u}_{\parallel}=\frac{\mathbf{p}+\boldsymbol{\alpha}_{\parallel}}{\mu}=\frac{\mathbf{p}}{\mu}\left(1+\frac{\frac{3}{2}\lambda_0^2}{\mu_0^2}+\frac{1}{|\mathbf{p}|}\frac{r}{\mu_0}\cos\theta\right) \tag{4.15}$$

$$\mathbf{u}_{\perp}=\frac{\boldsymbol{\alpha}_{\perp}}{\mu}=\mathbf{e}_3\frac{r}{\mu p^0}\sin\theta \tag{4.16}$$

где μ есть постоянная. Постоянная μ выбирается таким образом, чтобы длина вектора $\langle u\rangle=\{\langle u^0\rangle,\langle\mathbf{u}\rangle\}$ равнялась 1. Вектор $\langle u\rangle$ представляет собой среднее значение вектора $u=\{u^0,\mathbf{u}\}$. Среднее значение величины u определяется усреднением по θ

$$\langle u\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ud\theta, \tag{4.17}$$

Усредняя (4.13) - (4.16), получаем

$$\left\langle u^0\right\rangle=\frac{cp_0}{\mu}\left(1+\frac{\frac{3}{2}\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right) \tag{4.18}$$

$$\left\langle\mathbf{u}_{\parallel}\right\rangle=\frac{\mathbf{p}}{\mu}\left(1+\frac{\frac{3}{2}\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right),\quad\langle\mathbf{u}_{\perp}\rangle=0 \tag{4.19}$$

Из (4.18) и (4.19) следует, что длина вектора $\langle u\rangle$ описывается уравнением

$$\left\langle u^0\right\rangle^2-\left\langle\mathbf{u}_{\parallel}\right\rangle^2=\left(\frac{cp_0}{\mu}\right)^2\left(1+\frac{\frac{3}{2}\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right)^2-\left(\frac{\mathbf{p}}{\mu}\right)^2\left(1+\frac{3}{2}\frac{\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right)^2=\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right)^2=1 \tag{4.20}$$

Из (4.20) следует, что

$$\mu=\mu_0\left(1+\frac{3}{2}\frac{\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right) \tag{4.21}$$

μ минимально, если $\partial\mu/\partial\mu_0=0$

$$1-\frac{3}{2}\frac{\lambda_0^2}{\mu_0^2}=0,\quad\mu_0=\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_0,\quad\mu_{\min}=2\mu_0=\sqrt{6}\lambda_0$$

5 Расчет тензора энергии-импульса

Чтобы получить динамические уравнения для движения частицы в традиционном виде, мы используем законы сохранения для вещества и энергии-импульса

$$\partial_i\left(\rho\left\langle u^i\right\rangle\right)=0 \tag{5.1}$$

$$\partial_k T^{ik}=0,\quad i=t,x,z \tag{5.2}$$

где T^{ik} есть тензор энергии-импульса и ρ есть плотность частиц. Тензор T^{ik} выражается в терминах ρ, $\langle u^i\rangle$, и эти величины являются зависимыми переменными в динамических уравнениях (5.1) и (5.2).

Проекции вектора $\mathbf{u}$ на ось OX и на ось OZ имеют вид

$$u_z = u_\parallel \frac{p_z}{|\mathbf{p}|} - u_\perp \frac{p_x}{|\mathbf{p}|}, \quad u_x = u_\parallel \frac{p_x}{|\mathbf{p}|} + u_\perp \frac{p_z}{|\mathbf{p}|} \tag{5.3}$$

Используя (4.15) и (4.16), можно представить средние значения в составляющих u_x и u_z в виде

$$u_x = \frac{p_x}{\mu}\left(1+\frac{\frac{3}{2}\lambda_0^2}{\mu_0^2}+\frac{1}{|\mathbf{p}|}\frac{r}{\mu_0}\cos\theta\right) + \frac{p_z}{|\mathbf{p}|}\frac{r}{\mu p^0}\sin\theta \tag{5.4}$$

$$u_z = \frac{p_z}{\mu}\left(1+\frac{\frac{3}{2}\lambda_0^2}{\mu_0^2}+\frac{1}{|\mathbf{p}|}\frac{r}{\mu_0}\cos\theta\right) - \frac{p_x}{|\mathbf{p}|}\frac{r}{\mu p^0}\sin\theta \tag{5.5}$$

Тензор энергии-импульса может быть получен в виде

$$T^{ik} = \rho\left\langle u^i u^k\right\rangle, \quad i,k = t,x,z \tag{5.6}$$

Подсчитаем составляющие (5.6) и выразим их через $\langle u^t\rangle = \langle u^0\rangle$, $\langle u^x\rangle$, $\langle u^z\rangle$. Подставляя (5.6) в (5.1) и в (5.2), получим динамические уравнения для динамических переменных $\langle u^0\rangle$, $\langle u^x\rangle$, $\langle u^z\rangle$.

Расчет составляющих тензора энергии-импульса дает

$$T^{00} = \rho\left\langle\left(u^0\right)^2\right\rangle = \rho\left(\frac{cp_0}{\mu_0}\right)^2\left(1+\frac{3\lambda_0^2}{2\mu_0^2}\frac{|\mathbf{p}|^2}{c^2p_0^2}\left(\frac{1+\frac{3}{4}\frac{\lambda_0^2}{\mu_0^2}}{\left(1+\frac{\frac{3}{2}\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right)^2}\right)\right) \tag{5.7}$$

$$T^{0x} = \rho\left\langle u^0 u^x\right\rangle = \rho\frac{cp_0p_x}{\mu_0^2}\left(1+\frac{3\lambda_0^2}{2\mu_0^2}\frac{\left(1+\frac{3}{4}\frac{\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right)}{\left(1+\frac{\frac{3}{2}\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right)^2}\right) \tag{5.8}$$

$$T^{0z} = \rho\left\langle u^0 u^z\right\rangle = \rho\frac{p_0p_z}{\mu^2}\left(1+\frac{3\lambda_0^2}{2\mu_0^2}\frac{\left(1+\frac{3}{4}\frac{\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right)}{\left(1+\frac{\frac{3}{2}\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right)^2}\right) \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}T^{xx} &= \rho\left\langle u^x u^x\right\rangle = \rho\left(\frac{p_x^2}{|\mathbf{p}|^2}\left\langle\mathbf{u}_\parallel^2\right\rangle + \frac{p_z^2}{|\mathbf{p}|^2}\left\langle\mathbf{u}_{3\perp}^2\right\rangle\right) = \rho\left(\left(\frac{p_x}{\mu}\right)^2\left(1+\frac{3}{2}\frac{\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right)^2\right)\\ &+\rho\left(3\frac{\lambda_0^2c^2p_0^2}{2\mu^2\mu_0^2}\frac{p_x^2}{|\mathbf{p}|^2}\left(1+\frac{3\lambda_0^2}{4\mu_0^2}\right)+\left(\frac{p_z}{|\mathbf{p}|}\right)^2\frac{3}{2}\frac{\lambda_0^2}{\mu^2}\left(1+\frac{3\lambda_0^2}{4\mu_0^2}\right)\right)\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}T^{zz} &= \rho\left\langle u^z u^z\right\rangle = \rho\left(\frac{p_z^2}{|\mathbf{p}|^2}\left\langle\mathbf{u}_\parallel^2\right\rangle + \frac{p_x^2}{|\mathbf{p}|^2}\left\langle\mathbf{u}_{3\perp}^2\right\rangle\right) = \rho\left(\left(\frac{p_z}{\mu}\right)^2\left(1+\frac{3}{2}\frac{\lambda_0^2}{\mu_0^2}\right)^2\right)\\ &+\rho\left(\left(\frac{p_z}{\mu}\right)^2\left(3\frac{\lambda_0^2c^2p_0^2}{2\mu^2\mu_0^2|\mathbf{p}|^2}\left(1+\frac{3\lambda_0^2}{4\mu_0^2}\right)\right)+\left(\frac{p_x}{\mu}\right)^2\frac{3}{2}\frac{\lambda_0^2}{|\mathbf{p}|^2\mu^2}\left(1+\frac{3\lambda_0^2}{4\mu_0^2}\right)\right)\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$T^{xz} = \rho \left\langle u^x u^z \right\rangle = \rho \left\langle u^x \right\rangle \left\langle u^z \right\rangle \left(1 + \frac{3\lambda_0^2 \left(\left\langle u^0 \right\rangle^2 - 1 \right)}{2\mu_0^2 \left(\left\langle u_x \right\rangle^2 + \left\langle u_z \right\rangle^2 \right)} \frac{\left(1 + \frac{3\lambda_0^2}{4\mu_0^2} \right)}{\left(1 + \frac{3}{2} \frac{\lambda_0^2}{\mu_0^2} \right)^2} \right) \tag{5.12}$$

Выразим теперь тензор энергии-импульса как функцию переменных

$$v_x = \left\langle u^x \right\rangle, \quad v_z = \left\langle u^z \right\rangle \tag{5.13}$$

Исключая

$$p_x = \mu_0 \left\langle u^x \right\rangle = \mu_0 v_x, \quad p_z = \mu_0 \left\langle u^z \right\rangle = \mu_0 v_z, \quad p^0 = p_0 = \mu_0 \left\langle u^0 \right\rangle = \mu_0 v_0 = \mu_0 \sqrt{1 - v_x^2 - v_z^2} \tag{5.14}$$

получаем

$$T^{00} = \rho \left(v_0^2 + B \left(v_x^2 + v_z^2 \right) \right) = \rho \left(v_0^2 \left(1 + B \right) - B \right) \tag{5.15}$$

$$T^{0x} = \rho v_0 v_x \left(1 + B \right) \tag{5.16}$$

$$T^{0z} = \rho v_0 v_z \left(1 + B \right) \tag{5.17}$$

$$T^{xx} = \rho \left(v_x^2 \left(1 + B \right) + B \right) \tag{5.18}$$

$$T^{zz} = \rho \left(v_z^2 \left(1 + B \right) + B \right) \tag{5.19}$$

$$T^{xz} = \rho \left\langle u_x u_z \right\rangle = \rho v_x v_z \left(1 + B \right) \tag{5.20}$$

где

$$B = \frac{3\lambda_0^2}{2\mu_0^2} \frac{\left(1 + \frac{3}{4} \frac{\lambda_0^2}{\mu_0^2} \right)}{\left(1 + \frac{\frac{3}{2}\lambda_0^2}{\mu_0^2} \right)^2} \tag{5.21}$$

6 Динамические уравнения в пространстве-времени Минковского

Уравнение сохранения вещества

$$\partial_t \left(\rho v_0 \right) + \partial_x \left(\rho v_x \right) + \partial_z \left(\rho v_z \right) = 0 \tag{6.1}$$

Уравнения сохранения энергии-импульса

$$\partial_t \left(\rho \left(v_0^2 \left(1 + B \right) - B \right) \right) + \partial_x \left(\rho v_0 v_x \left(1 + B \right) \right) + \partial_z \left(\rho v_0 v_z \left(1 + B \right) \right) = 0 \tag{6.2}$$

$$\partial_t \left(\rho v_0 v_x \left(1 + B \right) \right) + \partial_x \left(\rho \left(v_x^2 \left(1 + B \right) + B \right) \right) + \partial_z \left(\rho v_x v_z \left(1 + B \right) \right) = 0 \tag{6.3}$$

$$\partial_t \left(\rho v_0 v_z \left(1 + B \right) \right) + \partial_x \left(\rho v_x v_z \left(1 + B \right) \right) + \partial_z \left(\rho \left(v_z^2 \left(1 + B \right) + B \right) \right) = 0 \tag{6.4}$$

Принимая во внимание последнее соотношение (5.14), можно записать уравнение (6.1) в виде

$$\partial_t \left(\rho v_0^2 \right) + \partial_x \left(\rho v_0 v_x \right) + \partial_z \left(\rho v_0 v_z \right) = \frac{B}{\left(1 + B \right)} \partial_t \rho \tag{6.5}$$

Уравнения (6.3) и (6.4) можно записать в виде

$$\partial_t\left(\rho v_0 v_x\right)+\partial_x\left(\rho v_x^2\right)+\partial_z\left(\rho v_x v_z\right)=-\frac{B}{(1+B)}\partial_x\rho \tag{6.6}$$

$$\partial_t\left(\rho v_0 v_z\right)+\partial_x\left(\rho v_x v_z\right)+\partial_z\left(\rho\left(v_z^2\right)\right)=-\frac{B}{(1+B)}\partial_z\rho \tag{6.7}$$

Дифференцируя левую часть равенства (6.5) и используя (6.1), получаем

$$\frac{dv_0}{d\tau}\equiv\left(v_0\partial_t+v_x\partial_x+v_z\partial_z\right)v_0=\frac{B}{(1+B)\,\rho}\partial_t\rho \tag{6.8}$$

где $d/d\tau$ есть производная по собственному времени. Тем же самым путем получаем из (6.6) и (6.7)

$$\frac{dv_x}{d\tau}\equiv\left(v_0\partial_t+v_x\partial_x+v_z\partial_z\right)v_x=-\frac{B}{(1+B)\,\rho}\partial_x\rho \tag{6.9}$$

$$\frac{dv_z}{d\tau}\equiv\left(v_0\partial_t+v_x\partial_x+v_z\partial_z\right)v_z=-\frac{B}{(1+B)\,\rho}\partial_z\rho \tag{6.10}$$

Из (6.8) -(6.10) и (4.20) следует, что

$$\frac{Bv_0}{(1+B)\,\rho}\partial_t\rho+\frac{Bv_x}{(1+B)\,\rho}\partial_x\rho+\frac{Bv_z}{(1+B)\,\rho}\partial_z\rho=0 \tag{6.11}$$

Тогда из (6.11) и (6.1) следует, что

$$\partial_t v_0+\partial_x v_x+\partial_z v_z=0 \tag{6.12}$$

Если $\lambda_0=0$, То из (5.21) следует, что $B=0$. Уравнения (6.8) - (6.10) превращаются в динамические уравнения для свободной частицы в пространстве-времени Минковского.

В дискретной геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_{\rm d}$ ускорение свободной частицы имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau}=-D\boldsymbol{\nabla}\log\rho,\quad D=\frac{B}{1+B} \tag{6.13}$$

которое ассоциируется со скоростью диффузии

$$\mathbf{v}_{\rm dif}=-D\boldsymbol{\nabla}\log\rho \tag{6.14}$$

где D есть коэффициент диффузии.

Таким образом, свободное движение в дискретной геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_{\rm d}$ приводится к движению в пространстве-времени Минковского с некоторым силовым полем, которое порождает диффузию. Довольно трудно представить себе силовое поле или потенциал, которые могли бы породить стохастическое (диффузионное) движение свободной частицы. Именно такое поле необходимо, чтобы породить взаимодействие типа (1.1).

Это означает, что для анализа источника κ-поля (1.1), нужно исследовать физические геометрии пространства-времени и, в частности, дискретную геометрию пространства-времени.

7 Заключительные замечания

Рассмотрение дискретной геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ и движения частиц в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ возможно, только если известна физическая геометрия, т.е. геометрия, которая получается из евклидовой геометрии методом ее деформации. Обычно используется геометрия на решетке, а не вариант (2.2) разрешения ограничения (2.1), потому что не понятно, как использовать мировую функцию для описания дискретной геометрии. Дело в том, что современные исследователи (особенно математики) не признают физическую геометрию по той причине, что физическая геометрия не является, вообще говоря, логическим построением. В физической геометрии отношение эквивалентности интранзитивно. Это приводит к неоднозначности решения двух уравнений (3.6) и (3.8), которые описывают равенство двух векторов. Стохастичность мировой линии частицы является следствием этой неоднозначности. Эта неоднозначность описывается зависимостью (4.10) и (4.11) от произвольного угла θ. Рассмотрение этой неоднозначности позволяет более детально исследовать стохастичность частицы, чем это возможно сделать в аксиоматической квантовой механике.

Список литературы

[1] E. Madelung, "Quanten theorie in hydrodynamischer Form *Z.Phys.* **40,** 322-326, (1926).

[2] Rylov Yu.A. Gas dynamics as a tool for description of nondeterministic particles. *International J. Theoretical physics* DOI 10.1007/s10773-015-2897-3

[3] Yu. A. Rylov, "Spin and wave function as attributes of ideal fluid", *J. Math. Phys.* **40**, 256-278, (1999).

[4] Rylov Yu.A. Metrical conception of the space-time geometry *Int. J. Theor, Phys.***54**, iss.1, 334-339, (2014), DOI: 10.1007/s10773-014-2228-0.

[5] Rylov Yu. A. Dynamic equations for tachyon gas, *Int. J. Theor. Phys.* **52**, 133(10), 3683- 3695, (2013)

[6] Rylov Yu. A., Неадекватность линейного векторного пространства при метрическом подходе к геометрии. *Гиперкомплексные числа в физике и геометрии* **11**, pp.88-95 (2014).

[7] Rylov Yu. A. Euclidean geometry as algorithm for construction of generalized geometries. *http://arXiv.org/abs/math.GM/0511575*

[8] Rylov Yu. A. General relativity extended to non-Riemannian space-time geometry. *Electronic Journal of Theoretical Physics* **11**, No. 31 (2014) pp 177-202, see also *e-print /0910.3582v7*

[9] Rylov Yu. A. Induced antigravitation in the extended general relativity . *Gravitation and Cosmology*, 2012, Vol. **18**, No. 2, pp. 107–112,(2012). DOI: 10.1134/S0202289312020089