Логическая перезагрузка как преодоление кризиса в геометрии

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Рассматриваются свойства логической перезагрузки в евклидовой геометрии. Логическая перезагрузка – это такая логическая операция, которая заменяет одну систему базовых понятий концепции другой системой базовых понятий той же самой концепции. Логическая перезагрузка не меняет утверждений концепции. Однако обобщения концепции различны для разных систем базовых понятий. Это обусловлено тем фактом, что некоторая система базовых понятий содержит не только утверждения концепции, но так же и некоторые атрибуты описания этой концепции. Свойства логической перезагрузки демонстрируются на примере собственно евклидовой геометрии, чьи обобщения приводят к различным результатам для разных систем базовых понятий.

1 Введение

Геометрия изучает форму и взаимное расположение физических тел, абстрагируясь от всех других свойств этих тел. После абстрагирования физическое тело превращается в геометрический объект, т.е. в некоторое подмножество точек пространства. Геометрия является наукой о форме геометрических объектов и их расположении в пространстве или в пространстве-времени. Пространство есть множество точек, а геометрический объект является подмножеством точек этого пространства.

Свойство геометрии быть наукой о взаимном расположении геометрических объектов в пространстве или пространстве-времени мы будем называть "геометричностью". Этот специальный термин необходим, потому что современная геометрия, вообще говоря, не "геометрична". Другими словами, современная геометрия не всегда является наукой о взаимном расположении геометрических объектов. Современная математика рассматривает геометрию просто как логическое построение. Например, симплектическая геометрия не является наукой о расположении геометрических объектов. Она является логическим построением, вид которого напоминает вид евклидовой геометрии. В приложениях геометрии к физике или механике важна только "геометричность" геометрии пространства-времени. Не имеет значения, является ли геометрия логическим построением. Если реальная геометрия пространства-времени неаксиоматизируема, это означает, что она не является логическим построением. Однако такая геометрия может быть геометричной, т.е. обладать свойством геометричности.

Современные математики не признают неаксиоматизируемых геометрий, которые обладают свойством геометричности, но не являются логическими построениями. Такую ситуацию следует квалифицировать как кризис в геометрии [1], который напоминает кризис, когда математики не признавали неевклидову геометрию Лобачевского-Больяи.

Прежде геометрия изучала расположение геометрических объектов в обычном пространстве. Время рассматривалось как дополнительная характеристика описания физических тел. После создания теории относительности пространство и время стали рассматриваться как единое пространство событий (пространство-время). Это более общий подход к описанию пространства событий. Каждая точка пространства событий является событием, которое происходит в некотором месте в некоторый момент времени.

Геометрия полностью описывается, если задано расстояние ρ между любой парой точек, принадлежащих пространству. Множество Ω точек с расстоянием ρ, заданном на множестве Ω, известно как метрическое пространство $\mathcal{M}$.

Использование метрического пространства в физике и механике встречает некоторые проблемы. Эти проблемы лежат в определении геометрических объектов в метрическом пространстве $\mathcal{M}$. Предполагается, что расстояние ρ удовлетворяет соотношениям

$$\rho : \Omega \times \Omega \to [0, \infty), \qquad \rho(Q, P) = \rho(P, Q), \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{1.1}$$

$$\rho(P, Q) = 0, \qquad \text{если и только если} \qquad P = Q \tag{1.2}$$

$$\rho(P, Q) + \rho(P, R) \geq \rho(R, Q), \qquad \forall P, Q, R \in \Omega \tag{1.3}$$

В евклидовой геометрии расстояние имеет свойства (1.1) - (1.3).

В геометрии Минковского расстояние не обладает этими свойствами. Однако, было бы очень желательно ввести метрическую геометрию (или некоторый ее аналог) для описания пространственно-временных свойств, потому что метрическая геометрия свободна от таких вспомогательных понятий как система координат, размерность и таких ограничений как непрерывность. Метрическая геометрия описывает геометрические свойства только в терминах расстояния, которое является истинно геометрическим понятием.

После устранения аксиомы треугольника (1.3) возникает дистантная геометрия [2]. Блюменталю не удалось построить прямую линию в терминах одного только расстояния. Он был вынужден ввести прямую как непрерывное отображение интервала $(0,1)$ на пространство (множество точек). Такое введение неметрического понятия в геометрию представляется нежелательным, потому что вводится вспомогательное понятие, и дистантная геометрия перестает быть чисто метрической геометрией.

Вообще говоря, построение геометрических объектов является главной трудностью метрической геометрии. Можно легко построить сферу и эллипсоид, потому что в евклидовой геометрии эти геометрические объекты строятся прямо в терминах расстояния. Однако построение других геометрических объектов нуждается в использовании некоторых вспомогательных средств. Например, определение плоскости содержит ссылку на концепцию линейной независимости векторов. Не совсем ясно, как ввести это понятие в терминах расстояния.

Сфера $Sp_{O,P}$ с центром в точке O и точкой P на поверхности сферы определяется как множество точек R

$$Sp_{O,P} = \{R|\rho(O,R) = \rho(O,P)\} \tag{1.4}$$

Эллипсоид $El_{F_1F_2P}$ с фокусами в точках F_1, F_2 и точкой P на поверхности эллипсоида определяется как множество точек R

$$El_{F_1F_2P} = \{R|\rho(F_1,R) + \rho(F_2,R) = \rho(F_1,P) + \rho(F_2,P)\} \tag{1.5}$$

Если точка P на поверхности эллипсоида совпадает с фокусом F_2, Эллипсоид $El_{F_1F_2P}$ вырождается в отрезок $\mathcal{T}_{[F_1F_2]}$ прямой линии

$$\mathcal{T}_{[F_1F_2]} = El_{F_1F_2F_2} = \{R|\rho(F_1,R) + \rho(F_2,R) = \rho(F_1,F_2)\} \tag{1.6}$$

В собственно евклидовой геометрии отрезок $\mathcal{T}_{[F_1F_2]}$ не имеет толщины (он является одномерным). Однако, если аксиома треугольника (1.3) не выполнена, то множество $\mathcal{T}_{[F_1F_2]}$ представляет собой неодномерную поверхность.

Критерий одномерности может быть сформулирован в терминах расстояния. Сечение $\mathcal{S}\left(P,\mathcal{T}_{[F_1F_2]}\right)$ определяется как множество точек R

$$\mathcal{S}\left(P,\mathcal{T}_{[F_1F_2]}\right) = \{R|\rho(F_1,R) = \rho(F_1,P) \wedge \rho(F_2,R) = \rho(F_2,P)\}, \qquad P \in \mathcal{T}_{[F_1F_2]} \tag{1.7}$$

Пусть $\mathcal{S}\left(P,\mathcal{T}_{[F_1F_2]}\right)$ является сечением отрезка $\mathcal{T}_{[F_1F_2]}$ в точке $P \in \mathcal{T}_{[F_1F_2]}$. Точка $P \in \mathcal{S}\left(P,\mathcal{T}_{[F_1F_2]}\right)$ очевидным образом. По определению сегмент (1.6) является одномерным (не имеет толщины), если любое сечение сегмента $\mathcal{T}_{[F_1F_2]}$ состоит из одной точки.

$$\mathcal{S}\left(P,\mathcal{T}_{[F_1F_2]}\right) = \{P\}, \qquad \forall P \in \mathcal{T}_{[F_1F_2]} \tag{1.8}$$

Можно показать,что соотношение (1.8) выполняется, если расстояние удовлетворяет аксиоме треугольника (1.3). В этом случае отрезок $\mathcal{T}_{[F_1F_2]}$ прямой линии может быть определен как линия минимальной длины, и это определение оказывается эквивалентным определению (1.6).

Другими словами, прямая не имеет толщины, и можно использовать оба определения отрезка прямой $\mathcal{T}_{[F_1F_2]}$: (1) прямая линия есть кратчайшая линия и

(2) определение (1.6). Оба эти определения эквивалентны. Однако определение (1.6) может быть использовано и в том случае, когда аксиома треугольника не выполняется, тогда первое определение становится некорректным.

Мы получаем следующую проблему: "Существуют ли такие геометрии, в которых аксиома треугольника не выполняется?" Разумеется этот вопрос интересен только применительно к реальной геометрии пространства-времени. Он не интересен для математиков, которые могут исследовать некоторый специальный класс геометрий (удовлетворяющих аксиоме треугольника), отложив на потом исследование более общих геометрий. Применение метрической геометрии к геометрии пространства-времени требует также отказа от условия (1.2), которое не может использоваться в геометриях с индефинитной метрикой, например, в геометрии Минковского.

В римановой геометрии пространства-времени мы имеем вместо (1.1) - (1.3)

$$\sigma : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(Q, P) = \sigma(P, Q), \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{1.9}$$

$$\sqrt{2\sigma(P, Q)} + \sqrt{2\sigma(P, R)} \leq \sqrt{2\sigma(R, Q)}, \qquad \forall P, Q, R \in \Omega \wedge \sigma(R, Q) > 0 \tag{1.10}$$

где $\sigma(P, Q)$ есть мировая функция, связанная с расстоянием $\rho(P, Q)$ с помощью соотношения

$$\sigma(P, Q) = \frac{1}{2}\rho^2(P, Q) \tag{1.11}$$

Мировая функция всегда вещественна, и расстояние положительно для времениподобного интервала ($\sigma(P, Q) > 0$), и оно мнимо для пространственноподобного интервала ($\sigma(P, Q) < 0$). В римановой пространственно-временной геометрии условия (1.9), (1.10) выполнены. Условие (1.10) для пространственноподобного расстояния ($\sigma(P, Q) < 0$) не существенно, потому что пространственноподобные мировые линии не используются в современной физике.

Как только был развит математический формализм для работы с мировой функцией [3, 4, 5], возник вопрос: "Если условие (1.10) не выполняется, является ли геометрия пространства-времени неримановой, или геометрии, вообще, не существует?" Это был очень важный вопрос. С одной стороны, метрическая геометрия нечувствительна к непрерывности или дискретности. Она нечувствительна также к размерности пространства-времени и к выбору системы координат. С другой стороны, если такие неримановы геометрии существуют, то нарушается привычная аксиома евклидовой (и римановой) геометрии (прямая не имеет толщины).

Мы не будем использовать термин "метрическая геометрия" по отношению к геометрии (1.9), потому что термин "метрическая геометрия" ассоциируется с аксиомой треугольника, наложенной на метрику (расстояние). Мы будем использовать термин "физическая геометрия" по отношению к геометрии, которая полностью описывается мировой функцией σ, удовлетворяющей условию (1.9). Другое (более раннее) название геометрии - "трубчатая геометрия" (Т-геометрия), возникшее из-за того, что в Т-геометрии некоторые прямые заменяются трубками. Существуют такие пространственно-временные изотропные геометрии, где времениподобные трубки вырождаются в одномерные прямые. Например, в пространственно-временной геометрии Минковского с мировой функцией

$$\sigma_{\mathrm{M}}\left(x,x'\right)=\frac{1}{2}g_{ik}\left(x^{i}-x'^{i}\right)\left(x^{k}-x'^{k}\right),\qquad g_{ik}=\mathrm{diag}\left\{c^{2},-1,-1,-1\right\}\tag{1.12}$$

времениподобные прямые одномерны (не имеют толщины), и движение свободных частиц является детерминированным.

Однако малая деформация (изменение мировой функции σ_{M}) пространства-времени Минковского превращает времениподобные прямые линии в трубки, и движение свободных частиц становится стохастическим. Если деформация пространства-времени зависит от квантовой постоянной надлежащим образом, то статистическое описание случайно движущихся свободных частиц оказывается эквивалентным квантовому описанию в терминах уравнения Шредингера [6]. Я получил этот результат только двадцать пять лет спустя после того, как возник вопрос о неримановой геометрии.

Этот факт связан с логической перезагрузкой, которая представляет собой логическую операцию. Эта логическая операция осуществляет переход от одной системы базовых понятий некоторой концепции к другой системе базовых понятий той же самой концепции. Как логическая операция логическая перезагрузка существенна только при обобщении существующей концепции. Такие обобщения довольно редки. По этой причине исследователи слабо владеют этой логической операцией.

Евклид создал свою геометрию как логическое построение. Евклидова геометрия изучается в этом виде более двух тысячелетий. В результате почти все исследователи полагают, что геометрия – это логическое построение. Но какая связь между свойствами пространства и логикой? Является ли геометрия логическим построением с необходимостью? Является ли формальная логика необходимой принадлежностью геометрии? Почему математики не признают неаксиоматизируемые геометрии, которые не используют формальной логики [1]? Эта работа написана, чтобы ответить на эти вопросы.

2 Построение геометрических объектов в евклидовой геометрии

Евклид исследовал свойства пространства, строя геометрические объекты. Исследование свойств геометрических объектов означало исследование свойств пространства, потому что можно изучать геометрию только через свойства геометрических объектов, помещенных в пространстве. Другими словами, изучение свойств множества точек является изучением свойств различных подмножеств этого множества точек. Геометрия как логическое построение представляет собой формализацию процесса построения геометрических объектов.

Евклид строил геометрические объекты из блоков ("кирпичей"). Он использовал три сорта блоков: (1) точка, (2) отрезок прямой, (3) угол. Комбинируя эти блоки, Евклид строил геометрические объекты и исследовал их свойства. При построении геометрических объектов Евклид использовал некоторые правила. Некоторая часть правил описывала свойства блоков. Другая часть правил описывала процесс комбинирования блоков при построении геометрических объектов. Число правил конечно, потому что конечно число сортов блоков. Евклидово пространство, которое исследовал Евклид, однородно и изотропно. Блоки не деформировались при перемещении, и число правил, описывающих перемещение блоков, также конечно. Правила работы с блоками позволяли ментально строить геометрические объекты из блоков. Кроме того эти правила порождали правила построения сложных геометрических объектов из других более простых геометрических объектов. Простые геометрические объекты, построенные из блоков, описывались правилами, известными как аксиомы. Более сложные правила (теоремы) построения геометрических объектов выводились из аксиом с помощью правил формальной логики. В целом такое построение геометрических объектов воспринималось как логическое построение, где правила формальной логики отражали правила построения геометрических объектов.

Обычно отвлекаются от того факта, что логическое построение геометрии является формализацией реального построения геометрических объектов из блоков. Евклидова геометрия представляется прямо как логическое построение. Связь между геометрией и логическим построением воспринимается столь сильно, что иногда логические построения, не связанные со свойствами пространства, рассматриваются как некоторые разновидности геометрии. Например, симплектическая геометрия трактуется как разновидность геометрии, хотя она не описывает свойства пространства. Она только имеет вид евклидовой геометрии с антисимметрической матрицей метрического тензора.

Собственно евклидова геометрия однородна и изотропна. Блоки можно легко перемещать без деформации их, и они используются для построения геометрических объектов. В однородной геометрии можно использовать конечное число сортов блоков. Соответствующее логическое построение содержит конечное число аксиом. Все утверждения однородной геометрии могут быть выведены из конечного числа аксиом, и такая геометрия может быть квалифицирована как аксиоматизируемая геометрия.

Если геометрия $\mathcal{G}$ неоднородна, то невозможно использовать конечное число сортов блоков, потому что блоки деформируются при перемещении. В результате два одинаковых геометрических объекта, построенных одинаковым образом в разных местах пространства, будут иметь различные свойства. В этом случае мы вынуждены использовать бесконечное число сортов блоков. Число аксиом будет бесконечно большим. Такую геометрию следует квалифицировать как неаксиоматизируемую геометрию.

Можно использовать другой способ построения неоднородных геометрий. Неоднородная геометрия $\mathcal{G}$ рассматривается как результат деформации некоторой эталонной геометрии $\mathcal{G}_{\rm st}$. Геометрия $\mathcal{G}_{\rm st}$ аксиоматизируема, и геометрические объекты в $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ строятся из блоков. Предполагается, что эталонная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ полностью описывается мировой функцией σ_{st}. Это означает, что все утверждения геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ могут быть выражены в терминах мировой функции σ_{st}. В частности, все геометрические объекты в $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ могут быть описаны в терминах мировой функции σ_{st}.

Неоднородная геометрия $\mathcal{G}$ и все геометрические объекты в $\mathcal{G}$ строятся как результат деформации эталонной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$. Это означает, что во всех описаниях геометрических объектов в $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ мировая функция σ_{st} заменяется мировой функцией σ геометрии $\mathcal{G}$. В результате получаются описания геометрических объектов в $\mathcal{G}$ и, следовательно, получается описание геометрии $\mathcal{G}$ в терминах мировой функции σ.

Метод построения геометрии $\mathcal{G}$ с помощью деформации эталонной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ называется принципом деформации [7]. Собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть использована в качестве эталонной геометрии, потому что $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ является аксиоматизируемой физической геометрией. Термин "физическая геометрия" означает по определению, что геометрия может быть полностью описана в терминах мировой функции σ_{E}.

При построении обобщенных геометрий мы традиционно заимствуем у Евклида его метод построения геометрии. Однако, его метод может быть использован только для построения аксиоматизируемых геометрий. Он не работает при построении физических геометрий, которые, вообще говоря, неаксиоматизируемы. Мы будем использовать собственно евклидову геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ как эталонную геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$. Это означает, что мы заимствуем у Евклида его геометрию, а не его метод построения геометрии.

При построении обобщенных геометрий важно уметь сравнивать геометрические объекты в разных геометриях. В частности, нужно уметь распознать одинаковые объекты в разных геометриях. Геометрические объекты в разных физических геометриях считаются похожими (одинаковыми), если они имеют один и тот же вид в терминах мировой функции. Например, отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ определяется соотношением (1.6) в терминах расстояния. В терминах мировой функции он имеет вид

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \left\{ R | \sqrt{2\sigma(P_0,R)} + \sqrt{2\sigma(R,P_1)} = \sqrt{2\sigma(P_0,P_1)} \right\} \tag{2.1}$$

Тот же вид определение отрезка прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ имеет во всех физических геометриях. Однако это не означает, что свойства отрезка прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ одни и те же во всех физических геометриях, потому что свойства мировой функции различны в разных физических геометриях. Например, в геометрии Минковского времени подобный отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ ($\sigma_{\mathrm{M}}(P_0,P_1) > 0$) является одномерным, т.е. любое его сечение, определяемое соотношением (1.7) состоит из одной точки

$$\mathcal{S}\left(P, \mathcal{T}_{[P_1P_2]}\right) = \{P\}, \qquad \forall P \in \mathcal{T}_{[P_1P_2]} \tag{2.2}$$

В деформированной геометрии Минковского σ_{d}, описываемой мировой функцией

$$\sigma_{\mathrm{d}} = \sigma_{\mathrm{M}} + d \cdot \mathrm{sgn}(\sigma_{\mathrm{M}}), \qquad d = \frac{\hbar}{2bc} = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

тот же самый времениподобный отрезок $\mathcal{T}_{[P_1P_2]}$ является поверхностью (трубкой). В соотношении (2.3) σ_{M} является мировой функцией пространства-времени Минковского, $\hbar$ есть квантовая постоянная, c есть скорость света, а b есть некоторая универсальная постоянная. При надлежащем выборе постоянной b, мировая функция (2.3) описывает свойства пространства-времени в микромире более эффективно, чем мировая функция σ_{M}. В пространственно-временной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, описываемой мировой функцией σ_{d}, мировые линии свободных частиц оказываются стохастическими. Статистическое описание этих стохастических мировых линий оказывается эквивалентным квантовому описанию в терминах уравнения Шредингера [6]. Другими словами, использование пространственно-временной геометрии (2.3) вместо геометрии Минковского позволяет исключить квантовые принципы.

Таким образом, надлежащий выбор геометрии пространства-времени позволяет объяснить квантовые эффекты как чисто геометрические эффекты. В этом объяснении используются только принципы классической динамики. Квантовые принципы не вводятся, или они получаются как следствия физической геометрии пространства-времени. При таком подходе число физических принципов уменьшается. Когда число базовых принципов уменьшается, физическая теория становится более совершенной.

При аксиоматическом подходе к геометрии свойства геометрических объектов получаются в виде теорем, выводимых из аксиоматики. В физических геометриях свойства геометрических объектов получаются только после принятия в расчет свойств мировой функции.

3 Логическая перезагрузка в собственно евклидовой геометрии

Существуют три различные эквивалентные представления собственно евклидовой геометрии [8]: (1) евклидово представление (E-представление), (2) векторное представление (V-представление) и (3) представление в терминах мировой функции (σ-представление). Преобразование от одного представления к другому представляет собой логическую перезагрузку, когда базовые понятия представления изменяются. E-представление использует три блока (точку, отрезок, угол) для построения геометрических объектов.

V-представление использует два блока (точку и направленный отрезок или вектор). Вместо угла используется дополнительная структура (линейное векторное пространство), которая осуществляет функцию угла, описывая направления векторов. Угол строится из двух отрезков, имеющих общую точку. Если сформулировать правила построения угла из двух отрезков, то можно уменьшить число сортов блоков, оставив только точку и отрезок. Блок "угол" заменяется правилом его построения. В результате получается два блока (точка и отрезок) и некоторая дополнительная структура, которая позволяет построить углы из двух отрезков. Эта дополнительная структура известна как линейное векторное пространство. Уменьшение числа базовых элементов (блоков) представляет собой логическую перезагрузку, которая вводится в собственно евклидовой геометрии. Эта логическая перезагрузка от E-представления к V-представлению обусловлена применением евклидовой геометрии в физике и механике, где используются понятия вектора и системы координат. Понятие угла не столь существенно, поскольку направленность вектора можно описывать скалярными произведениями этого вектора с базисными векторами системы координат. Вектор (направленный отрезок) и система координат являются атрибутами линейного векторного пространства, которое является вспомогательной структурой в V-представлении.

Векторное представление основано на понятии линейного векторного пространства, которое содержит такие понятия как непрерывность размерность, система координат, линейная независимость. Эти понятия необходимы для приложений к физике и механике, где они нужны для описания динамики частиц и эволюции силовых полей. Эти понятия используются в V-представлении как базовые понятия, или как свойства линейного векторного пространства. Традиционно линейное векторное пространство рассматривается как атрибут евклидовой геометрии (а не как атрибут описания геометрии).

σ-представление содержит только один блок (точку). Поскольку отрезок может быть построен из точек, то можно еще уменьшить число сортов блоков, оставив только один сорт (точку). Исключение отрезка (вектора) сопровождается правилами построения отрезка из точек. Это уменьшение числа сортов блоков приводит к логической перезагрузке (переходу от V-представления к σ-представлению). Этот переход к σ-представлению сопровождается введением новой структуры (мировой функции), которая содержит правила построения отрезка из точек (2.1). Мировая функция описывает связь между двумя точками пространства. Это позволяет построить все атрибуты линейного векторного пространства в терминах мировой функции. Мировая функция позволяет получить все понятия V-представления (размерность, систему координат, метрический тензор, линейное векторное пространство). Разумеется, построение всех атрибутов возможно при условии, что мировая функция является мировой функцией евклидовой геометрии. Эта мировая функция удовлетворяет некоторым условиям, которые оказываются довольно сильными ограничениями.

Определение 1. *Вектор* $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}$ *– это упорядоченное множество из двух точек* P_0, P_1. *Точка* P_0 *является началом вектора, а точка* P_1 *– его концом. Длина вектора* $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ *есть*

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = \sqrt{2\sigma\left(P_0, P_1\right)} \qquad (3.1)$$

Ключевой точкой σ-представления является определение скалярного произведения в терминах мировой функции.

Определение 2. *Скалярное произведение* $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ *двух векторов* $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ *и* $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ *имеет вид*

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma\left(P_0, Q_1\right) + \sigma\left(P_1, Q_0\right) - \sigma\left(P_0, Q_0\right) - \sigma\left(P_1, Q_1\right) \qquad (3.2)$$

Если начала векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ совпадают $Q_0 = P_0$, то соотношение (3.2) принимает вид

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, P_0) - \sigma(P_1, Q_1) \tag{3.3}$$

Вместе с соотношением (3.1) соотношение (3.3) реализует формулировку теоремы косинусов. В соотношениях (3.1) - (3.3) мировая функция σ является мировой функцией евклидовой геометрии.

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости nвекторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$,...$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$, определенных $n+1$ точкой $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\}$ в собственно евклидовом пространстве, является обращение в нуль определителя Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)||, \qquad i,k = 1,2,...n \tag{3.4}$$

Выражая скалярные произведения $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)$ в (3.4) через мировую функцию σ_{E} с помощью соотношения (3.3), получаем определение линейной зависимости n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$,...$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ в собственно евклидовом пространстве в виде

$$F_n(\mathcal{P}^n) = 0 \tag{3.5}$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det||\sigma(P_0, P_i) + \sigma(P_0, P_k) - \sigma(P_i, P_k)||, \qquad i,k = 1,2,...n \tag{3.6}$$

Необходимые и достаточные условия того, что физическая геометрия, описываемая мировой функцией σ, является n-мерным собственно евклидовым пространством имеют вид четырех условий.

I. Определение размерности геометрии:

$$\exists\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{3.7}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама (3.6). Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1,2,...n$ являются являются базисными векторами в прямолинейной системе координат K_n с началом координат в точке P_0. Метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i,k = 1,2,...n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\, g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta_l^i, \qquad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \qquad i,l = 1,2,...n \tag{3.8}$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det||g_{ik}(\mathcal{P}^n)|| \neq 0, \qquad i,k = 1,2,...n \tag{3.9}$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\,(x_i(P) - x_i(Q))\,(x_k(P) - x_k(Q)), \qquad \forall P,Q \in \Omega \tag{3.10}$$

где координаты $x_i(P)$, $x_i(Q)$, $i = 1,2,...n$ точек P и Q суть ковариантные координаты векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ соответственно, определяемые соотношением

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i = 1,2,...n \tag{3.11}$$

III: Матрица $g_{lk}\left(\mathcal{P}^n\right)$ имеет только положительные собственные значения

$$g_k > 0, \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{3.12}$$

IV. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{3.13}$$

рассматриваемая как система уравнений для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, ...n$ имеет всегда одно и только одно решение. Условия I – IV содержат ссылку на размерность n евклидова пространства.

Обобщение евклидовой геометрии в V-представлении позволяет рассматривать геометрии с индефинитным метрическим тензором (геометрия Минковского), или геометрию с метрическим тензором, который различен в разных точках пространства. Однако в V-представлении можно рассматривать только геометрии имеющие одну и ту же размерность во всех точках пространства. Кроме того в V-представлении нельзя отличить размерность как число координат, описывающих многообразие, от размерности как числа линейно независимых векторов, хотя эти понятия, вообще говоря, различны.

В σ-представлении можно рассматривать геометрии, не имеющие размерности, или имеющие размерности, различные в разных точках пространства. Это различие между представлениями возникает, потому что в V-представлении размерность пространства является первичным свойством геометрии, тогда как в σ-представлении размерность является вторичным свойством геометрии (что-то вроде атрибута описания в V-представлении. Оно является вторичным понятием, определяемым видом мировой функции.

Логическая перезагрузка, преобразующая V-представление евклидовой геометрии в σ-представление, очень важна с точки зрения возможного обобщения евклидовой геометрии. При обобщении евклидовой геометрии в V-представлении наиболее ограничивающими являются свойства (3.7) и (3.10) евклидовой геометрии, которые должны сохраняться, потому что это свойства линейного векторного пространства, являющегося главной структурой V-представления.

При обобщении евклидовой геометрии в σ-представлении линейное векторное пространство, вообще говоря, не используется. Отношение эквивалентности становится интранзитивным. Суммирование векторов и умножение вектора на вещественное число становятся многовариантными. Вектор, вообще говоря, не может быть представлен как сумма его составляющих вдоль координатных осей, хотя проекция $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) / |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|$ вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ на ненулевой вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется однозначно. Хотя многие свойства векторов в σ-представлении оказываются многовариантными и необычными, эти свойства обусловлены реальной геометрией пространства-времени.

Следует знать эти реальные свойства геометрии пространства-времени, потому что в общей теории относительности свойства геометрии пространства-времени определяются распределением материи. Нельзя знать заранее вид геометрии пространства-времени, и следует рассматривать все возможные геометрии. В общей теории относительности предполагается, что геометрия пространства-времени является римановой геометрией. Таким образом, предположение, что геометрия пространства-времени риманова, является ошибочным с физической точки зрения. Обобщение ОТО на случай произвольной физической геометрии пространства-времени показывает, что пространственно-временная геометрия оказывается неримановой уже в случае слабого гравитационного поля тяжелой сферы [9].

Математика не рассматривает проблемы приложения геометрии к физике и механике. Математики могут исследовать только часть возможных геометрий (например, только аксиоматизируемые геометрии), и это рассмотрение только части всех геометрий не является ошибкой с математической точки зрения. Однако, если математики полагают, что неаксиоматизируемые геометрии не возможны, и пытаются вывести неаксиоматизируемые геометрии из некоторых новых аксиоматик, то это становится ошибкой. Получаемые таким способом геометрии оказываются непоследовательными. Между прочим, уже риманова геометрия оказывается непоследовательной [1].

4 Следствия логической перезагрузки

В приложении к евклидовой геометрии логическая перезагрузка означает переход от традиционного V-представления к σ-представлению. В результате главная структура V-представления (линейное векторное пространство) заменяется мировой функцией (структурой σ-представления). Геометрия и все геометрические величины определяются через мировую функцию σ, и только через мировую функцию σ. В частности, вектор, который определяется в V-представлении как элемент линейного векторного пространства, определяется в σ-представлении соотношениями (3.1) - (3.6). Разумеется, если условия евклидовости выполняются, то все результаты, полученные в V-представлении, совпадают с результатами, полученными в σ-представлении. Если условия (3.7) - (3.10) не выполняются, геометрия перестает быть евклидовой, и линейное векторное пространство не может быть введено. Однако, результаты, полученные в σ-представлении имеют смысл, и они могут содержать много неожиданных свойств.

Наиболее важным свойством физической геометрии, порожденным нарушением условий (3.9) и (3.10), является многовариантность [10]. Многовариантность геометрии по отношению к вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и точке Q_0 означает по определению, что в точке Q_0 имеется много векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1'$,..., которые эквивалентны вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

Эквивалентность ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\text{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$) векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется следующим образом

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\text{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1), \quad \text{если} \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|\cdot|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \quad (4.1)$$

Если вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ задан, и ищется вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в точке Q_0, эквивалентный вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, то нужно решить два уравнения (4.1) относительно положения точки Q_1. В собственно евклидовой геометрии два уравнения (4.1) имеют всегда одно и только одно решение независимо от размерности евклидова пространства. Это означает, что в точке Q_0 имеется один и только один вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, эквивалентный вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Собствено евклидова геометрия одновариантна. В произвольной физической геометрии $\mathcal{G}$ два уравнения (4.1) могут иметь много решений. Тогда в точке Q_0 имеется много векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, эквивалентных вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Это означает, что геометрия $\mathcal{G}$ многовариантна. В этом случае отношение эквивалентности интранзитивно, и геометрия $\mathcal{G}$ неаксиоматизируема. Таким образом, неаксиоматизируемость физической геометрии есть следствие ее многовариантности.

Многовариантность является естественным свойством физической (неаксиоматизируемой) геометрии. Многовариантность отсутствует, когда выполнены условия (3.9) и (3.10). В аксиоматизируемой геометрии свойство многовариантности отсутствует. Аксиоматизируемые геометрии хорошо изучены и обычно рассматриваются как "правильные геометрии". Однако, аксиоматизируемость не является характерной чертой "правильной геометрии". Аксиоматизируемость является свойством наиболее изученных геометрий. Вообще говоря, физическая геометрия многовариантна, и многовариантность является естественным свойством пространственно-временной геометрии.

Как мы видели во введении отрезок времениподобной прямой в реальной геометрии пространства-времени (2.3) не является одномерным, и это свойство является следствием многовариантности геометрии относительно времениподобных векторов.

Многовариантность приводит к расщеплению геометрических объектов. Мы рассмотрим этот эффект на примере кругового цилиндра. В собственно евклидовой геометрии он определяется его осью и точкой P на его поверхности. Пусть F_1, F_2 суть две точки на оси кругового цилиндра. Цилиндр $Cl_{PF_1F_2}$ определяется как множество точек R

$$Cl_{PF_1F_2} = \{R | S_{F_1F_2R} = S_{F_1F_2P}\} \tag{4.2}$$

где $S_{F_1F_2R}$ есть площадь треугольника с вершинами в точках F_1, F_2, R, которая рассчитана по формуле Герона через длины сторон треугольника. Площади $S_{F_1F_2R}$ и $S_{F_1F_2P}$ выражаются через мировую функцию от соответствующих точек. Пусть $\mathcal{T}_{[F_1F_2]}$ является отрезком прямой между точками F_1, F_2 и точка $F_3 \in \mathcal{T}_{[F_1F_2]}$. Пусть $F_3 \neq F_1$, Тогда в собственно евклидовой геометрии форма кругового цилиндра зависит только от оси, но не от выбора точек на ней, и

$$Cl_{PF_1F_2} = Cl_{PF_1F_3}, \qquad F_3 \in \mathcal{T}_{[F_1F_2]} \tag{4.3}$$

Однако, в многовариантной геометрии, вообще говоря, $Cl_{PF_1F_2} \neq Cl_{PF_1F_3}$, и в многовариантной геометрии имеется много цилиндров, соответствующих одному круговому цилиндру в собственно евклидовой геометрии. С точки зрения V-представления это интерпретируется как расщепление евклидова цилиндра в многовариантной геометрии. С точки зрения σ-представления тот факт, что форма цилиндров $Cl_{PF_1F_2}$ и $Cl_{PF_1F_3}$, вообще говоря, различны, представляется совершенно естественным. С этой точки зрения уравнение (4.3) означает вырождение цилиндров в евклидовой геометрии. Интерпретация соотношения (4.3) как вырождения является более правильной геометрической интерпретацией, потому что она не использует такую вспомогательную структуру как линейное векторное пространство.

5 Заключительные замечания.

Традиционный подход к геометрии пространства-времени, когда геометрия рассматривается как логическое построение, является ограниченным. Чтобы получить правильное описание геометрии пространства-времени, нужно осуществить логическую перезагрузку и перейти к восприятию геометрии как науки о форме и взаимном расположении геометрических объектов. Используя этот подход и рассматривая собственно евклидову геометрию, получаем три различные представления евклидовой геометрии. Эти представления различаются числом сортов блоков, используемых для построения геометрических объектов. Уменьшение сортов блоков компенсируется введением дополнительной структуры, которая описывает правила построения устраненного блока. В евклидовой геометрии переход от одного представления к другому может быть осуществлен средствами формальной логики. Это обстоятельство позволяет интерпретировать логическую перезагрузку как логическую операцию.

В неоднородных геометриях, где блоки деформируются, переход от одного представления к другому становится, вообще говоря, невозможным. В этом случае используется принцип деформации, который работает только в σ-представлении. После деформации эталонной (собственно евклидовой) геометрии полученная геометрия оказывается, вообще говоря, неаксиоматизируемой.

Логическая перезагрузка в собственно евклидовой геометрии не меняет этой геометрии. Однако, возможности обобщения собственно евклидовой геометрии различны в разных представлениях этой геометрии. Максимальной возможностью обобщения обладает σ-представление, где геометрия описывается в терминах мировой функции σ, которая является функцией двух точек пространства. Обобщение собственно евклидовой геометрии в σ-представлении позволяет строить многовариантные геометрии, которые не являются аксиоматизируемыми. Появление многовариантных (неаксиоматизируемых) геометрий показывает, что традиционный подход, когда геометрия рассматривается как логическое построение, может использоваться только в некоторых специальных случаях. Логическая перезагрузка к σ-представлению возвращает нас к прежней концепции геометрии как науки о форме и взаимном расположении геометрических объектов. Другими словами, логическая перезагрузка к σ-представлению не является новой идеей. Это возвращение к старой идее метрической геометрии, которая не работает без использования принципа деформации. Метрическая геометрия, будучи оснащена принципом деформации, превращается в физическую геометрию, являющуюся отличным инструментом для описания пространства-времени.

Использование физической геометрии позволяет описывать геометрию пространства-времени в микромире, где геометрия многовариантна и не может быть описана в терминах традиционной римановой геометрии. Физическая геометрия пространства-времени эффективна и в космологии, где геометрия пространства-времени нериманова. Она не может правильно описываться, если предполагать, что геометрия пространства-времени является римановой.

Интересно, что динамика частиц описывается уравнениями в конецных разностях (а не дифференциальными уравнениями). Даже уравнения для гравитационного поля имеют вид конечных уравнений (а не дифференциальных). Это связано с тем фактом, что физическая геометрия пространства-времени может быть дискретной. Дифференциальные уравнения не могут эффективно использоваться в пространственно-временной геометрии, которая может быть дискретной в некоторых областях.

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, New crisis in geometry? *e-print /math.GM/0503261*

[2] L.M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953.

[3] J.L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960. рус. пер. Дж.Синг, *Общая теория относительности.* ИИЛ, Москва 1963.

[4] Ю.А.Рылов, Описание риманова пространства с помощью конечного интервала. *Известия ВУЗов* Серия матем. No.3, 132, (1962).

[5] Yu.A. Rylov, Relative gravitational field and conservation laws in general relativity. *Ann. Phys.* (Leipzig) **12**, 329, (1964).

[6] Yu.A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092, (1991).

[7] Yu.A. Rylov, Non-Euclidean method of the generalized geometry construction and its application to space-time geometry. in *Pure and Applied Differential geometry* pp.238-246. eds. Franki Dillen and Ignace Van de Woestyne. Shaker Verlag, Aachen, 2007.

[8] Yu. A. Rylov, Different conceptions of Euclidean geometry. *e-print 0709.2755*

[9] Yu. A. Rylov, Relativistic nearness of events and deformation principle as tool of the relativity theory generalization on the arbitrary space-time geometry. *e-print 0910.3582v5.*

[10] Yu. A. Rylov, Multivariance as a crucial property of microcosm. *Concepts of Physics 6, iss.1, 89 -117, (2009)*. Смотри также *e-print* 0806.1716.